Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Сибирский государственный университет
путей сообщения»

На правах рукописи



Королёва Валерия Сергеевна

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ОТ ГОРНОГО ДАВЛЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ ПРИ СВОДООБРАЗОВАНИИ

Специальность 2.1.2 – Основания и фундаменты,
подземные сооружения

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
кандидат технических наук
Кузнецов Анатолий Олегович

Новосибирск, 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4
Глава 1. Состояние вопроса 10
1.1. Теории горного давления 10
1.2. Теория сводообразования 15
1.3. Основные численные методы в расчетах подземных сооружений 44
1.4. Вариационное исчисление в задачах подземного строительства 54
Выводы по главе 1 59
Глава 2. Вариационное решение классической задачи устойчивости свода обрушения 61
2.1. Постановка задачи вариационного исчисления 61
2.2. Три варианта решения задачи об устойчивости свода обрушения 64
2.3. Решение «Эйлер – 1» 66
2.4. Решение «Эйлер – 2» 71
2.5. Решение «Эйлер – 3» 73
2.6. Сводка формул по трем вариантам решения 77
2.7. Анализ поведения функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$ 80
2.8. Анализ поведения зависимостей $P(R_c)$ и $h(R_c)$ 86
2.9. Влияние параметра m на поведение зависимостей $P(R_c)$, $y(x)$ и $\sigma_n(x)$ 89
2.10. Некоторые особенности решения при $m = 1$ 92
2.11. Критические пролеты свода обрушения и критическая прочность 98
2.12. Сопоставление с результатами известных решений 108
Выводы по главе 2 115
Глава 3. Устойчивость свода обрушения над криволинейными конструкциями в скальных и дисперсных грунтах 116
3.1. Описание типа исследуемых сооружений 116
3.2. Постановка и решение задачи в скальных грунтах 118
3.3. Некоторые результаты решения задачи о своде обрушения над калоттой в скальных грунтах 124

3.4. Постановка и решение задачи о своде обрушения над калоттой в дисперсных грунтах 131
3.5. Некоторые результаты решения задачи о своде обрушения над калоттой в дисперсных грунтах 137
Выводы по главе 3 142
Глава 4. Практическая методика расчета 143
и ее обоснование 143
4.1. Общие положения и структура главы 143
4.2. Сопоставление с численными решениями 146
4.3. Сопоставление с данными натурных измерений 153
4.4. Сопоставление с нормативными методиками 160
4.5. Практическая методика для предварительной оценки горного давления на подземные сооружения 166
Выводы по главе 4 172
Заключение 173
Список литературы 175
Приложение А Свод в скальных грунтах: результаты аналитических решений 193
Приложение Б Свод в скальных грунтах: влияние параметра m 196
Приложение В Свод над калоттой в скальных грунтах: графики функции $P(R_c, h_c, m)$ 200
Приложение Г Свод над калоттой в скальных грунтах: графики функций $P(R_c)$ и $P(h_c)$ 203
Приложение Д Сводообразование над калоттой: сопоставление с МПА 210
Приложение Е Высота свода обрушения над калоттой в дисперсных грунтах 212
Приложение Ж Справки о внедрении результатов диссертационной работы . 214

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследований. Вопросы определения давления грунта на подземные сооружения занимают центральное место в теории и практике подземного строительства. От качества решения этих вопросов зависит и безопасность ведения работ, и эксплуатационная надежность подземных сооружений, и общий социально-экономический эффект на протяжении всего их жизненного цикла.

В отечественном транспортном и гидротехническом тоннелестроении, а также в метростроении, основной расчетной схемой для определения нагрузки на подземные сооружения от горного давления является схема сводообразования, которая целиком базируется на теории М.М. Протодьяконова. Данный подход получил широкомасштабную апробацию на практике и, как любой широко применяемый метод, имеет потенциал развития.

Так, применение этой схемы для конструкций криволинейного очертания может быть усовершенствовано по сравнению с тем, как это сейчас предусмотрено нормативными документами. Это имеет значение и для расчета временной крепи при проходке выработок, и для проектирования постоянных конструкций таких сооружений, у которых ширина превышает высоту – например, односводчатые станции метрополитенов на линиях глубокого заложения или автодорожные тоннели.

Кроме того, в самой схеме сводообразования по-прежнему остаются проблемы теоретического характера, работа над которыми может быть продолжена – это, во-первых, хорошо известная проблема определения коэффициента крепости, и, во-вторых, развитие методов анализа силового взаимодействия свода обрушения с окружающим массивом.

Другой путь расчетного определения давления грунта на конструкции подземных сооружений – это численные методы, применение которых за последние два десятилетия приобрело огромный размах. В то же время, справедливо было бы сказать, что применительно к обсуждаемому классу задач верификация чис-

ленных методов еще далека от завершения. Результаты численных расчетов приходится контролировать, используя и экспериментальные приемы, и упрощенные расчетные схемы, и весь имеющийся опыт проектирования.

Из сказанного вытекает, что дальнейшее теоретическое исследование схемы сводообразования является актуальной задачей.

Степень разработанности темы. Среди весьма внушительного количества публикаций, посвященных горному давлению, не так много работ, где исследовалась бы расчетная схема сводообразования. Прежде всего, это – работы В. Риттера, М.М. Протодьяконова, П.М. Цимбаревича, И.В. Баклашова и др.

В 2015 г. И.В. Баклашов писал: «…*задача сводообразования остается нерешенной до настоящего времени*». В 2023 г. вариант теоретического решения этой задачи был предложен Я.О. Стахнёвым. Это решение может быть усовершенствовано как в части его адаптации для подземных конструкций криволинейного очертания, так и в части отказа от дополнительных гипотез, введенных Я.О. Стахнёвым, за счет применения методов вариационного исчисления.

Цель работы – разработка методики определения вертикальной нагрузки от горного давления на криволинейные конструкции подземных сооружений в рамках теории сводообразования на основе вариационных принципов.

Задачи исследований.

1. Решить задачу о сводообразовании в скальных грунтах в рамках расчетной схемы Риттера-Стахнёва методами вариационного исчисления.
2. Применить полученное решение к задаче о вертикальном давлении скальных грунтов на криволинейные конструкции подземных сооружений.
3. Методом характеристик теории предельного равновесия (ТПР) решить задачу о давлении дисперсных грунтов на криволинейные конструкции подземных сооружений.
4. Выполнить анализ применения численных методов к решению задач о давлении скальных и дисперсных грунтов на криволинейные конструкции подземных сооружений при сводообразовании.

5. Разработать практическую методику расчета по результатам выполненных исследований.

Объект исследования – область обрушения грунта, формирующаяся над подземными сооружениями (свод обрушения).

Предмет исследования – предельное напряженное состояние грунта на границе и внутри свода обрушения.

Научная новизна состоит в следующем.

1. Получено три новых варианта решения задачи о своде обрушения в скальных грунтах как задачи вариационного исчисления с использованием стандартных параметров прочности скального грунта.

2. Получено решение вариационной задачи о своде обрушения в скальных грунтах над подземными сооружениями криволинейного очертания.

3. Получено новое решение статики сыпучей среды задачи о своде обрушения в дисперсных грунтах над подземными сооружениями криволинейного очертания.

4. Выявлен ряд закономерностей формирования свода обрушения и изменения величины нагрузки от горного давления на криволинейные подземные сооружения в скальных и дисперсных грунтах.

Теоретическая значимость заключается в том, что полученное решение задачи о сводообразовании базируется только на уравнении равновесия, условии прочности грунта и поиске максимума нагрузки от горного давления на конструкции подземного сооружения в скальных грунтах без привлечения дополнительных гипотез. В рамках одной расчетной схемы удалось описать потерю устойчивости и пологих сводов обрушения, работающих в основном на отрыв, и подъемистых сводов, в нижней части которых при взаимодействии с окружающим грунтом возникает распор. Теоретически установлено, что в скальных грунтах очертание свода обрушения не зависит от высоты арки криволинейного подземного сооружения. Дано решение этой же задачи для дисперсных грунтов. Установлены границы применимости двух наиболее распространенных численных методов для этого класса задач.

Практическая значимость состоит в следующем.

1. Для расчета давления скальных грунтов на подземные конструкции и для очертания свода обрушения предложены компактные замкнутые формулы, что сильно упрощает их практическое использование.

2. Установлена степень влияния подъема арки подземной конструкции на величину вертикальной нагрузки от горного давления, что позволяет обосновывать более экономичные решения конструкций подземных сооружений.

3. Предложена практическая методика расчета давления на подземные сооружения в скальных и дисперсных грунтах. В рамках этой методики устранено несоответствие, существующее в нормативных документах, между значениями высоты свода обрушения в дисперсных и полускальных грунтах.

4. Предложенная практическая методика не выходит за рамки устоявшейся концепции проектирования подземных сооружений.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач использовались:

– статический анализ силового взаимодействия свода обрушения и окружающего массива с определением напряжений по границе свода;

– классические методы вариационного исчисления для отыскания экстремума функционала;

– статический метод теории предельного равновесия (ТПР) грунтов – метод характеристик;

– численные методы расчета с применением сертифицированных программных комплексов.

Положения, выносимые на защиту:

– результаты трех вариантов решения задачи о своде обрушения как задачи вариационного исчисления;

– результат решения задачи о своде обрушения, формирующемся над подземными сооружениями криволинейного очертания, в рамках теории сводообразования;

– результаты решения задачи ТПР о предельном давлении дисперсных грунтов на подземные конструкции криволинейного очертания;

– методика расчета вертикального давления от горного давления на подземные сооружения, в том числе криволинейного очертания, в скальных и дисперсных грунтах.

Степень достоверности результатов подтверждается применением апробированных методов механики грунтов, сопоставлением с результатами аналогичных исследований, а также сопоставлением с результатами, полученными по методике, которая прошла вековую апробацию при проектировании транспортных и гидротехнических тоннелей в нашей стране.

Личный вклад автора состоит в получении всех представленных аналитических решений для скальных грунтов, построении решений методом характеристик для дисперсных грунтов, получении численных решений, проведенных сопоставлениях и анализе результатов, разработке практической методики расчета.

Результаты исследований внедрены на ряде объектов, в т.ч. АО «Мосинжпроект», ООО «ПИ Бамтоннельпроект».

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семи Международных и Всероссийских конференциях, в том числе:

– XI Российско-Китайская Международная конференция «Проблемы нелинейной геомеханики на больших глубинах» (Новосибирск, СО РАН, 2023);

– Китайско-Российский форум молодых ученых в области геотехники и подземного строительства (Москва, ТАР, 2023);

– XV, XVI, XVII научно-технические конференции «Гидроэнергетика гидротехника. Новые разработки и технологии» (Санкт-Петербург, ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 2023, 2024, 2025);

– Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием «Современные методы проектирования, подземного строительства и реконструкции оснований и фундаментов (GFAC 2024)» (Санкт-Петербург, СПбГАСУ, 2024).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 11 работ, в том числе три статьи в журналах из перечня ВАК РФ и одна статья в журнале, индексируемом в МБД.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и семи приложений. Диссертация содержит 215 страниц, 98 рисунков, 17 таблиц. Список литературы насчитывает 178 наименований, в т.ч. 34 на иностранных языках.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертация соответствует пп. 2, 3 и 16 паспорта специальности 2.1.2 – Основания и фундаменты, подземные сооружения.

ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

1.1. Теории горного давления

Понятие горного давления. Центральная задача в теории подземного строительства – это определение нагрузки от горного давления, которая действует на конструкции подземных сооружений.

Горное давление – важнейшее понятие и основной предмет исследований при анализе силового взаимодействия подземных сооружений с окружающим грунтовым массивом. Общепринятого определения для горного давления до настоящего времени не выработано. Приведем концепцию А.А. Борисова [12] как одну из наиболее удачно определяющих это понятие. Согласно А.А. Борисову, *горное давление в широком смысле означает природное напряженное состояние в грунтовом массиве, а в узком смысле – силовое воздействие грунта на подземное сооружение*.

О классификации решений в теории горного давления. Методы расчета нагрузки от горного давления разрабатывались и совершенствовались в течение многих десятилетий. Большой вклад в развитие теории горного давления на разных этапах внесли отечественные и зарубежные ученые – Авершин С.Г. [1], Анциферов С.В. [2], Баклашов И.В. [3-5], Барон Л.И. [6], Богомолов А.Н. [11], Борисов А.А. [12], Бренблатт Г.И. [36], Булычёв Н.С. [14-15], Васильев Л.М. [15], Волков В.П. [18], Голицынский Д.М. [21], Деев П.В. [26-28], Динник А.Н. [29], Ержанов Ж.С. [32], Ершов Л.В. [4], Заславский Ю.З. [34], Зерцалов М.Г. [36], Исаков А.Л. [37], Картозия Б.А. [42-44], Кузнецов Г.Н. [54], Кузнецов С.В. [55], Курленя М.В. [56], Лаббас А. [160], Ледяев А.П. [59], Либерман Ю.Н. [60], Лиманов Ю.А. [61], Литвинский Г.Г. [62-64], Машуков В.И. [73], Меркин В.Е. [74], Миренков В.Е. [75], Насонов Л.Н. [15], Неверов С.А. [76], Опарин В.Н. [79], Панкратенко А.Н. [80], Покровский Н.М. [83], Протодьяконов М.М. [84, 85], Протодьяконов-мл М.М. [170], Протосеня А.Г. [86, 87], Ревуженко А.Ф. [88, 89], Ремезов А.В. [81, 90], Руппенейт К.В. [91, 92], Савин Г.Н. [93, 94], Саммаль А.С. [95], Серя-

ков В.М. [96, 97], Слесарёв В.Д. [98], Соколовский В.В. [104], Стажевский С.Б. [115], Стахнёв Я.О. [52, 116], Фисенко Г.Л. [124], Фотиева Н.Н. [126], Фрейдин А.М. [127, 128], Фролов Ю.С. [129-131], Хан Г.Н. [7], Храпов В.Г. [134], Цимбаревич П.М. [135], Чанышев А.И. [136-139], Шашенко А.Н. [141], Шемякин Е.И. [143], Fenner R. [123], Ketter F. [158, 159], Lyamin A.V. [163, 164], Ritter W. [173], Wang X.B. [177], Wittke W. [17], Yansen [63] и др.

Для многочисленной группы этих методов созданы специальные классификации, отражающие особенности расчетных схем, применяемых моделей грунта и областей применения. Совсем кратко рассмотрим некоторые из них.

А.А. Борисов классифицирует исследования в интересующей нас области по основополагающим гипотезам, принятым в том или ином решении:

– гипотеза сплошной среды, принятая в многочисленных работах, среди которых, в первую очередь, можно выделить труды Р. Феннера, А.П. Соколова, А.Н. Динника, А. Лаббаса, К.В. Руппенейта и многих других;

– гипотеза сплошной вязко-упругой среды, использованная А. Салустовичем, М.И. Розовским, Ж.С. Ержановым и др.;

– гипотеза свода обрушения, исследованная В. Риттером, М.М. Протодьяконовым, П.М. Цимбаревичем и др.;

– гипотеза плит, связанная, прежде всего, с именем проф. В.Д. Слесарева.

Н.С. Булычёв в своих книгах [14, 15] методологически следует схеме, принятой в механике сплошной среды. Сначала им описывается упругая задача о напряженно-деформированном состоянии (НДС) грунта вокруг круглой выработки, затем даются усложнения по форме выработки, глубине расположения и пр. Затем идет описание жесткопластической, упругопластической и вязко-упругопластических моделей грунта. В рамках этих моделей и теорий рассматриваются разнообразные схемы практических задач – схема опускающегося столба, экспериментальные данные относительно предельного состояния дисперсных грунтов над выработкой [116], схемы с зонами нарушенных пород вокруг выработки, решения об НДС вокруг вертикальных стволов. Несколько обособленно Н.С. Булычёвым описывается теория сводообразования по М.М. Протодьяконову.

Достаточно близким по структуре является изложение теорий горного давления у И.В. Баклашова [4] и Б.А. Картозии [44].

Иначе выстроена книга М.Г. Зерцалова «Механика скальных грунтов и скальных массивов» [36]. Значительная ее часть посвящена самой природе механических свойств скальных грунтов. Приводятся и подробно анализируются многочисленные данные разнообразных испытаний на прочность и деформируемость. Описываются системы оценки механических свойств скальных массивов, в том числе такие параметры, как *RQD, RMR, GSI, Q*-система и другие. Много внимания уделяется влиянию трещиноватости на механические свойства скальных массивов и масштабному эффекту. В условиях дефицита подобной литературы хотелось бы подчеркнуть исключительную важность этой книги.

С точки зрения ясности и доступности изложения нельзя не упомянуть «Механику подземных сооружений» Г.Г. Литвинского [62] и еще одну книгу с таким же названием за авторством Ю.С. Фролова и Т.В. Иванес [130, 131]. В этих работах авторы также придерживаются классификации на основе моделей грунта.

Еще одна классификация, о которой можно упомянуть, приводится в диссертации Я.О. Стахнёва [116]:

– по геометрии и расположению – в зависимости от глубины, вертикальная или горизонтальная выработка, протяженная выработка или камерная и т.д. [116];

– по моделям грунта – аналогично тому, что перечислено выше [116];

– по типу моделируемых процессов – столб или свод обрушения, гипотеза плит, карст и пр. [116];

– по типу грунта – скальный, дисперсный, в том числе с учетом полного водонасыщения, или мерзлый [116].

Интересный, хотя, возможно, и несколько упрощенный, подход к структурированию решений задач о горном давлении предложен Г.Г. Литвинским в его статье [63]. Он рассматривает три принципиальных схемы, отличающиеся по расположению выработки – вблизи поверхности, на небольшой глубине и на большой глубине. Важным, если не определяющим, фактором называется соотношение вертикального и бокового давления. Г.Г. Литвинский справедливо указывает

на то, что коэффициент бокового давления увеличивается с глубиной и на больших глубинах стремится к единице. На этом основании Г.Г. Литвинский подводит читателя к мысли о том, что для небольших глубин лучше всего подходит теория сводообразования М.М. Протодьяконова, а для больших – решения А. Лаббаса, Р. Феннера, К.В. Руппенейта, Ю.М. Либермана и др., в развитие которых Г.Г. Литвинский предлагает собственное решение с переменной (изменяющейся в радиальном направлении от выработки) прочностью скального грунта. Основная идея решения Г.Г. Литвинского – учет снижения прочности в зоне т.н. «запредельных» деформаций, формирующейся вокруг выработки.

В приведенных классификациях можно выделить две группы расчетных схем. В расчетных схемах первой группы рассматривается единая система «крепь – горная порода», работающая совместно. В расчетных схемах второй группы определение нагрузки от горного давления рассматривается отдельно, а затем уже нагрузка прикладывается на крепь выработки или конструкцию подземного сооружения.

Для первой группы характерны, например, граничные условия по контуру выработки – это, например, упругие или упругопластические решения Р. Феннера, А. Лабаса, К.В. Руппенейта и др.

Для второй группы характерны расчетные схемы столба обрушения или свода обрушения. В практике тоннелестроения они обычно называются расчетом на заданные нагрузки. Что касается столба обрушения, то это – решения Тернера [62] и Янсена-Кеттера [62]. Что касается свода обрушения – это предмет исследования данной диссертации, и в данной главе ему посвящен отдельный параграф.

О некоторых фундаментальных решениях. Если принять, что на больших глубинах коэффициент бокового давления приближается к единице, то это сильно упрощает задачу о круговой выработке, поскольку схема становится полярно-симметричной, и число уравнений в упругой постановке снижается до пяти, а в жесткопластической – до двух. Пионерными решениями в рамках теории упругости стали решения Г. Ляме (*Gabriel Lamé*) и А.В. Гадолина, а базовые жесткопластические решения перечислены выше. Заметим, что решения Г. Ляме и А.В. Га-

долина не были связаны с грунтами, но послужили отправной точкой для многих задач о горном давлении.

Еще одно решение, изначально с грунтами несвязанное, но серьезно повлиявшее на развитие теории горного давления – это упругопластическое решение Л.А. Галина [19]. В этой работе был применен аппарат теории функции комплексного переменного, и это дало толчок к развитию целых научных школ в механике подземных сооружений.

К.В. Руппенейт одним из первых адаптировал решение Л.А. Галина к задачам горного давления. Результаты своих исследований он изложил в монографии «Некоторые вопросы механики горных пород» [91]. Впоследствии в развитие задачи Л.А. Галина достаточно много работ выполнено в Институте горного дела им. Н.А. Чинакала Сибирского отделения РАН.

Задача о сводообразовании является еще одним фундаментальным направлением в теории горного давления. Это направление получило широчайшее практическое применение в нашей стране, сделавшись за примерно 100 лет основной теоретической базой в тоннеле- и метростроении и в строительстве гидротехнических туннелей. Наибольший вклад в развитие теории сводообразования внесли В. Риттер [173], М.М. Протодьяконов [84], М.М. Протодьяконов-мл. [170], П.М. Цимбаревич [135], Л.И. Барон [6]. Как ни странно, но приходится констатировать существование ощутимого разрыва между, с одной стороны, очень широким практическим внедрением схемы сводообразования, а с другой стороны – сравнительно малым количеством ее теоретических исследований. Лишь в последние годы в работах Я.О. Стахнёва были получены новые существенные результаты [116]. В следующем пункте настоящей главы мы детально рассмотрим это направление.

В рамках теории М.М. Протодьяконова может быть детализирована еще одна схема, к которой сейчас на практике применяется общий алгоритм решения задачи сводообразования. Это – задача о давлении свода обрушения на конструкции криволинейных подземных сооружений. Такая схема имеет свои особенности, имеющие последствия с точки зрения построения теоретических решений – эта

мысль подробнее будет раскрыта в настоящем исследовании (см. п. 3.1). Частным случаем этой схемы является крепление калотты – верхней части поперечного сечения тоннеля при поэтапном раскрытии подземной выработки.

1.2. Теория сводообразования

Расчетная схема свода обрушения. Как сказано выше, в тоннеле- и метростроении, а также в гидротехническом строительстве, наиболее распространенной расчетной схемой для вычисления вертикальной нагрузки от горного давления является схема свода обрушения. На сегодняшний день эта схема закреплена в нормативных документах СП 102.13330.2012 [107], СП 120.13330.2022 [109] и СП 122.13330.2023 [111]. Она основана на теории сводообразования М.М. Протодьяконова с уточнением, которое было сделано П.М. Цимбаревичем. Это уточнение заключается в том, что область обрушения состоит не только из свода, но еще и из боковых призм обрушения (см. далее).

Нормативная методика, о которой идет речь, хорошо известна. Тем не менее, данный подраздел имеет смысл начать с описания основных ее положений. Это делается для того, чтобы впоследствии можно было свободно ссылаться на эти положения, поскольку они важны для исследуемого вопроса и разрабатываемых в данной диссертации решений.

Расчетная схема свода обрушения показана на рис 1.1. В грунтовом массиве, вмещающем подземное сооружение *1*, формируется область обрушения, которая состоит из боковых призм *2* и свода *3*. В рамках данной расчетной схемы свод обрушения создает вертикальное давление на конструкции тоннеля, определяемое как

$$p = \gamma h, \tag{1.1}$$

где γ – удельный вес грунта; h – высота свода обрушения, которая согласно теории сводообразования рассчитывается по формуле

$$h = \frac{l/2}{f}. \tag{1.2}$$

Здесь l – пролет (ширина) свода обрушения, f – коэффициент крепости грунта. Условимся в дальнейшем обозначать половину пролета свода через a.

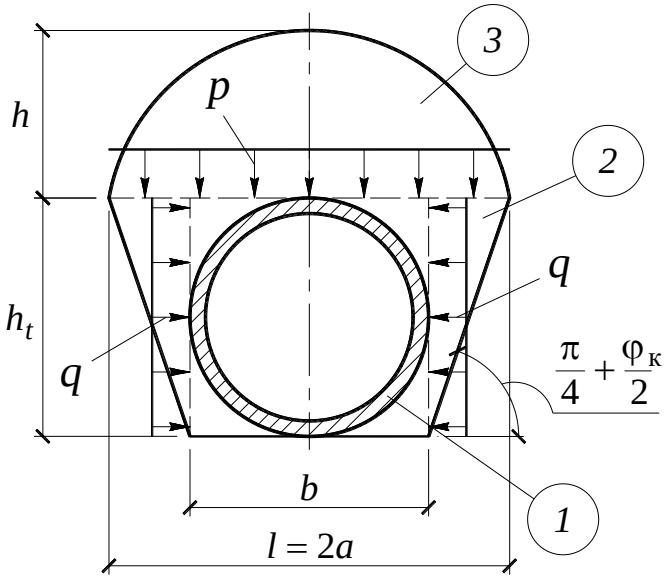


Рисунок 1.1 – Основная расчетная схема теории сводообразования:
1 – свод обрушения; *2* – боковые призмы обрушения; *3* – подземное сооружение

Пролет свода обрушения, в свою очередь, дается выражением:

$$l = b + 2h_t \operatorname{tg}(\pi/4 - \varphi_к/2),$$

где $\varphi_к$ – т.н. кажущийся угол внутреннего трения, равный $\varphi_к = \operatorname{arctg} f$; b и h_t – ширина и высота выработки (габариты подземного сооружения).

Боковое давление вычисляют по формуле, в которой без труда узнается известное из механики грунтов выражение для активного давления:

$$q = \gamma(h + 0{,}5h_t)\operatorname{tg}^2(\pi/4 - \varphi_к/2).$$

Прежде чем продолжить, сделаем три оговорки.

Первая оговорка касается обозначений. В данной диссертации будем использовать обозначения, несколько от отличающиеся от принятых в нормах [109, 111]:

– высота свода обрушения h вместо h_1;

– высота подземного сооружения h_t или h_c вместо h;

– вертикальное давление p вместо q;

– горизонтальное (боковое) давление q вместо p;

– пролет свода обрушения l вместо L;

– пролет подземного сооружения b вместо B.

Это сделано потому, что обозначения, принятые в [109, 111], вступают в некоторое противоречие с обозначениями, принятыми в других источниках, на которые в работе также будет много ссылок. Поэтому с позиций простоты и наглядности изложения материала, состоящего в значительной степени из формул, приняты именно такие обозначения.

Вторая оговорка. На некоторых важных положениях СП [109, 111] мы здесь не останавливаемся, поскольку они не используются или почти не используются в решениях задач, составляющих основное содержание данной диссертации. В частности, речь идет о смене схемы обрушения свода обрушения на столб обрушения, о схеме вывала грунта при $l/h > 6$, об условиях, которые регламентируют учет или неучет бокового давления q, и некоторых других.

Третья оговорка касается классификации грунтов. В настоящей работе мы будем придерживаться классификации грунтов в том виде, в каком она дана в ГОСТ 25100-2020 «Грунты. Классификация» [25]. Скальный грунт – это грунт с жесткими и прочными связями кристализационного и цементационного типа. Дисперсный грунт – это грунт, который либо не имеет связей между частицами, либо это связи водноколлоидного и цементационного типа. Заметим, что связи цементационного типа в дисперсных грунтах слабее на порядки, чем цементационные связи в скальных грунтах. Кроме этого, иногда будем использовать понятие полускальных грунтов – по существу, это те же скальные грунты, но у которых прочность на одоосное сжатие меньше 5 МПа. Отметим также, что для описываемых ниже решений имеет особое значение способность грунтов воспринимать растягивающие напряжения. В этой связи будем считать, что дисперсные грунты вообще не работают на растяжение, в то время как скальные грунты имеют такую характеристику – прочность грунта на одноосное растяжение R_t. В отдельных случаях могут возникать некоторые недоразумения. Например, некоторые протерозойские глины имеют прочность на сжатие порядка 3 МПа и, соответственно, какую-то прочность на растяжение. Но это отдельные частные случаи,

которые не влияют на общую картину, заданную приведенной выше классификацией.

Коэффициент крепости. Итак, коэффициент крепости f занимает центральное место в нормативной методике, основанной на теории М.М. Протодьяконова.

Вообще говоря, коэффициент крепости f – это условная величина, в целом характеризующая устойчивость грунта над выработкой, размеры свода обрушения и, соответственно, нагрузку на конструкции тоннелей. Формула для коэффициента крепости по определению имеет вид:

$$f = \frac{l/2}{h}. \qquad (1.3)$$

Из этой формулы следует выражение (1.2) для высоты свода обрушения.

До выхода первых редакций СП 120 и СП 122 в 2012 году значение f принималось по шкале М.М. Протодьяконова (таблица 1.1). Это было прямо прописано в СНиПах 1962 и 1978 годов [101, 102].

Таблица 1.1 – Шкала крепости грунтов по проф. М.М. Протодьяконову [84, 85, 101, 102]

Степень крепости	Описание пород	f
в высшей степени крепкие	Наиболее крепкие, плотные и вязкие кварциты и базальты. Исключительные по крепости другие породы	**20**
очень крепкие	Очень крепкие гранитные породы. Кварцевый порфир, очень крепкий гранит, кремнистый сланец. Менее крепкие, нежели указанные выше кварциты. Самые крепкие песчаники и известняки	**15**
крепкие	Гранит (плотный) и гранитные породы. Очень крепкие песчаники и известняки. Кварцевые рудные жилы. Крепкий конгломерат. Очень крепкие железные руды	**10**
крепкие	Известняки (крепкие). Некрепкий гранит. Крепкие песчаники. Крепкий мрамор. Доломит. Колчеданы	**8**
довольно крепкие породы	Обыкновенный песчаник. Железные руды	**6**
довольно крепкие	Песчанистые сланцы. Сланцеватые песчаники	**5**
довольно крепкие	Крепкий глинистый сланец. Некрепкий песчаник и известняк, мягкий конгломерат	**4**
довольно крепкие	Крепкий глинистый сланец. Некрепкий песчаник и известняк, мягкий конгломерат	**4**
средние	Разнообразные сланцы (некрепкие). Плотный мергель	**3**

Продложение таблицы 1.1

довольно мягкие	Мягкий сланец, очень мягкий известняк, мел, каменная соль, гипс. Мерзлый грунт, антрацит. Обыкновенный мергель. Разрушенный песчаник, сцементированная галька, каменистый грунт	**2**
довольно мягкие	Щебенистый грунт. Разрушенный сланец, слежавшаяся галька и щебень. Крепкий каменный уголь. Отвердевшая глина	**1,5**
мягкие	Глина (плотная). Мягкий каменный уголь.	**1**
мягкие	Легкая песчанистая глина, лесс, гравий	**0,8**
землистые	Растительная земля. Торф. Легкий суглинок, сырой песок	**0,6**
сыпучие	Песок, осыпи, мелкий гравий, насыпная земля, добытый уголь	**0,5**
плывучие	Плывуны, болотистый грунт, разжиженный лесс и другие разжиженные грунты	**0,3**

Особенности методики СП 120 и СП 122. С 2012 года ситуация несколько поменялась – для скальных грунтов высота свода обрушения стала рассчитываться по формуле [109, 111]:

$$h = \frac{l}{0,2R_c\alpha},$$

где R_c – предел прочности скального грунта на одноосное сжатие, МПа; α – коэффициент, учитывающий трещиноватость массива (таблица 1.2).

Таблица 1.2 – Коэффициент α, учитывающий влияние трещиноватости массива [109, 111]

Категория массива скальных грунтов по степени трещиноватости	Коэффициент α при пределе прочности грунта «в куске» на сжатие, МПа				
	10	20	40	80	160
I – практически нетрещиноватые	1,7	1,4	1,2	1,1	1
II – малотрещиноватые	1,4	1,2	1	0,9	0,8
III – среднетрещиноватые	1,2	0,9	0,7	0,6	0,5
IV – сильнотрещиноватые	0,9	0,7	0,5	0,4	0,3
V – раздробленные (разборная скала)	0,7	0,4	0,3	0,2	0,1

Сравнивая данное выражение с (1.2), и удалив на время из рассмотрения коэффициент α, имеем

$$f = \frac{R_c}{10}. \qquad (1.4)$$

Отметим, что эта формула для коэффициента крепости была предложена еще самим М.М. Протодьяконовым.

Для дисперсных грунтов формула (1.2) для высоты h свода остается без изменений, а в СП 120 даже приводится таблица значений f, принимаемых по описанию грунта [109, п. 5.6.4.11, таблица 5.9]. Согласно этой таблице для дисперсных грунтов $f = 0{,}6\ldots1{,}0$.

На этом этапе возникает, по нашему мнению, достаточно крупная проблема. Для скального грунта, например, с $R_c = 6$ МПа, по формуле (1.4) имеем $f = 0{,}6$, т.е. как для суглинка полутвердой консистенции [109, п. 5.6.4.11, таблица 5.9]. Больше того, для полускальных грунтов $R_c = 3$ МПа по формуле (1.4) имеем $f = 0{,}3$, что соответствует плывунам по М.М. Протодьяконову (см. таблицу 1.1), а в СП 120 в таблице 5.9 такие маленькие значения f вообще отсутствуют.

Возможно, этим объясняются значения коэффициента $\alpha = 1{,}1\ldots1{,}7$ (см. таблицу 1.2), что само по себе необычно: коэффициент, учитывающий трещиноватость, имеет значения больше единицы. Хотя даже самое большое значение $\alpha = 1{,}7$, как видим из приведенных примеров, не снимает указанной проблемы.

Особенности методики СП 102. Для гидротехнических туннелей в СП 102 [107] вертикальное давление рассчитывается по формуле, несколько отличной от (1.1), а именно:

$$p = \beta\gamma h,$$

где β – коэффициент, принимаемый равным от 0,7 до 1,0 в зависимости от пролета выработки b.

Высота h свода обрушения вычисляется по формуле (1.2) только при $f < 4$. Если $f \geq 4$, то величина h рассматривается уже не как высота свода обрушения, а как высота (в СП 102 она называется глубиной) нарушенной зоны над туннелем:

$$h = k_a b,$$

где k_a – коэффициент, принимаемый равным от 0,05 до 0,3 в зависимости от трещиноватости и значений f.

На наш взгляд, это очень важное отступление от М.М. Протодьяконова, потому что при соотношении $l/h > 8$ возникает резонный вопрос: такое очертание

свода обрушения – это еще пологий свод или уже практически ровный потолок? В любом случае, это ведет к очень малым нагрузкам на обделку.

Кстати, в СП 120 и СП 122 аналогичный вопрос решается несколько по-другому: если $l/h > 6$, то меняется схема свода обрушения на схему локального вывала.

Величина коэффициента крепости для гидротехнических туннелей принимается по формуле (1.4), о чем сказано в тексте СП 102 [107, п. 5.4].

Заметим, что в том же пункте СП 102 [107] рекомендован ГОСТ 21153.1-75* [24] на лабораторный метод определения коэффициента крепости. Этот ГОСТ рекомендован и тоннельщикам, однако принятая там схема испытаний, по мнению многих специалистов, выглядит весьма спорной и неочевидной, и большого распространения этот лабораторный метод не получил.

Интересно также отметить, что для глубоких гидротехнических туннелей с заложением свыше 400 м пунктом 10.15 СП 102 [107] регламентируется отход от гипотезы сводообразования в пользу расчетных схем типа схемы К.В. Руппенейта.

О формулах для коэффициента крепости. С одной стороны, описанные нормативные методики (фактически – теория М.М. Протодьяконова) прошли вековую апробацию. Они стали, по сути, безальтернативной теоретической базой для проектирования транспортных тоннелей, метрополитенов и гидротехнических туннелей.

С другой стороны, коэффициент крепости – центральная величина, которая играет определяющую роль в этой теории, – не имеет строгого обоснования и лабораторных методов определения. Значение коэффициента крепости или принимается по описанию грунта (см. таблицу 1.1), или рассчитывается по эмпирическим формулам, также адресующим к этой шкале.

Наиболее простая и распространенная формула – это формула (1.4), которая, как было показано, при малых R_c вступает в противоречие со шкалой М.М. Протодьяконова, хотя им и была предложена. Однако, это далеко не единственная формула для f. Только М.М. Протодьяконов предложил семь методов вычисления

коэффициента крепости. Все эти методы носят сугубо эмпирический характер и сегодня почти не используются. Их описание можно найти, например, в [84].

Очень похожую на (1.4) формулу предложил М.М. Протодьяконов-мл.:

$$f = \frac{R_c}{14}.$$

Однако эта формула также не решает проблемы значений коэффициента крепости при малых R_c. Более адекватные результаты дает расчет f по формуле Л.И. Барона [6]:

$$f = \frac{R_c}{30} + \sqrt{\frac{R_c}{3}}. \qquad (1.5)$$

До конца вопросы не снимает и эта формула, но она уже лучше соответствует шкале М.М. Протодьяконова.

Стоит упомянуть еще одну формулу М.М. Протодьяконова, которая связывает коэффициент крепости с коэффициентом трения. Но об этой формуле речь пойдет ниже, поскольку она предназначена для дисперсных грунтов.

Некоторые выводы по результатам анализа нормативной методики и теории М.М. Протодьяконова. Зафиксируем несколько положений, которые можно сделать из анализа нормативных методик и теории М.М. Протодьяконова.

Первое. Выражение (1.3) имеет принципиальный характер, формализуя основную идею теории сводообразования. Эта идея состоит в том, что размер свода обрушения определяется интегральным прочностным параметром – коэффициентом крепости. К слову, в отечественном тоннеле- и метростроении этот коэффициент определяет не только размеры свода обрушения, но и многие технологические процессы.

Второе. Для назначения величины коэффициента крепости М.М. Протодьяконовым была разработана специальная шкала, в которой коэффициент крепости принимается по описанию грунта. Эта шкала была составлена М.М. Протодьяконовым по результатам выполненного им анализа и обобщения обширного эмпирического материала.

Третье. Помимо описательной шкалы, М.М. Протодьяконовым было предложено семь способов вычисления коэффициента крепости, в том числе и формула (1.4), ныне вошедшая в нормативные документы.

Четвертое. Существуют и другие зависимости, связывающие коэффициент крепости с прочностью грунта на одноосное сжатие – наиболее известные среди них формулы М.М. Протодьяконова-мл. и Л.И. Барона. Однако, все эти попытки разработать способ вычисления коэффициента крепости неизменно адресуют к шкале М.М. Протодьяконова.

Пятое. До выхода норм [110] 2012 года высота h свода обрушения выражалась напрямую из формулы (1.3), а коэффициент крепости f принимался по шкале М.М. Протодьяконова, которая была непосредственно включена в тексты СНиПов. Таким образом, шкала М.М. Протодьяконова получила широчайшую апробацию на практике и воспринимается как надежный, хотя и описательный, ориентир при оценке устойчивости грунтов вокруг подземных сооружений.

Шестое. Включение в нормативные документы формулы (1.4) привело к двум противоречиям. Во-первых, например, полускальному грунту с прочностью R_c = 3 МПа, даже без учета трещиноватости, соответствует значение коэффициента крепости f = 0,3, что по шкале М.М. Протодьяконова соответствует плывунам, а по таблице 5.9 СП 120 [109] это значение в два раза меньше, чем у суглинков полутвердой консистенции, для которых f = 0,6. Во-вторых, для очень прочных грунтов с R_c = 400 МПа по формуле (1.4) коэффициент крепости f = 40, в то время как по шкале М.М. Протодьяконова максимальное значение f = 20.

Седьмое. Методика лабораторного определения коэффициента крепости регламентирована ГОСТ 21153.1-75* [23], однако в силу довольно неочевидной (и даже спорной) схемы испытаний она не получила распространения.

Подытоживая, можно сказать, что схема свода обрушения прочно вошла в отечественную практику проектирования транспортных тоннелей, метрополитенов и гидротехнических туннелей, однако нормативная методика имеет ряд недостатков, связанных с невозможностью определить коэффициент крепости, иначе

как по описательной шкале М.М. Протодьяконова или по формулам, отсылающим к этой же шкале с той или иной степенью приближения.

Таким образом, нормативная методика требует дальнейшего совершенствования.

Далее рассмотрим основные этапы развития теории сводообразования и обсудим основные решения, сформировавшие исследовательское и практическое пространство этой теории.

Решение М.М. Протодьяконова. Прежде чем перейти к решениям задач о сводообразовании в скальных грунтах, которые логически выводят на основную канву настоящей работы, рассмотрим одно решение М.М. Протодьяконова для дисперсных грунтов [12, 84, 85], которое, как будет показано в главе 2, неожиданно удалось подтвердить, пройдя совершенно иным путем.

На рисунке 1.2 показана расчетная схема М.М. Протодьяконова к выводу величины коэффициента крепости. Пусть *AB* – криволинейный контур левой половины симметричного свода обрушения. Предположим, что свод потерял устойчивость и обрушился в выработку, и контур *AB* теперь является границей, свободной от напряжений.

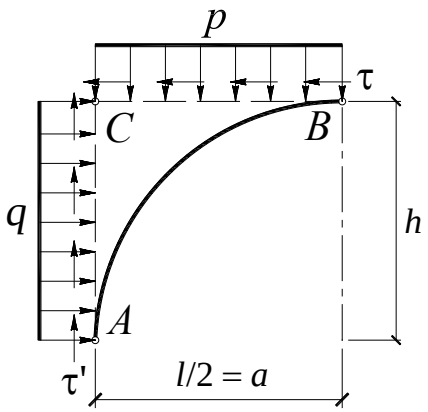


Рисунок 1.2 – Расчетная схема М.М. Протодьяконова
к определению коэффициента крепости в дисперсных грунтах

Далее, в массиве, нависающем над выработкой, мысленно проведем вертикальную *AC* и горизонтальную *BC* линии, выделив тем самым криволинейный треугольник *ABC*. Рассмотрим равновесие выделенной области *ABC*. На отрезке

BC действуют нормальные *p* и касательные τ напряжения, а на отрезке *AC* – нормальные *q* и касательные τ′ напряжения.

М.М. Протодьяконовым было принято, что, во-первых, *p* = const и *q* = const, а, во-вторых, что собственный вес криволинейного треугольника *ABC* пренебрежимо мал по сравнению с силами *p*·*a* и *q*·*h*, действующими по линиям *BC* и *AC* соответственно.

Составим уравнение равновесия моментов относительно точки *A*:

$$-\frac{pa^2}{2}+\tau ah-\frac{qh^2}{2}=0,$$

откуда

$$q=\frac{2}{h^2}\left(\tau ah-\frac{pa^2}{2}\right).$$

На этом этапе М.М. Протодьяконовым вводится самая важная в данном решении гипотеза о том, что нормальные *p* и касательные τ напряжения на отрезке *BC* связаны законом сухого трения, причем сцеплением можно пренебречь:

$$\tau = pf\ , \qquad (1.6)$$

где *f* – коэффициент трения.

Правомерность введения данной гипотезы, на наш взгляд, проблематична, поскольку соотношение (1.6) фактически означает, что линия *BC* суть линия скольжения, что никак не вытекает из постановки задачи, и никак не соотносится с существующими представлениями о характере разрушения грунта над выработкой.

Возвращаясь к выражению для *q*, запишем его в виде:

$$q=\frac{2p}{h^2}\left(afh-\frac{a^2}{2}\right).$$

Теперь ставится задача отыскания максимума функции *q* по аргументу *a*:

$$\frac{dq}{da}=\frac{2p}{h^2}(fh-a)=0,$$

откуда

$$f = \frac{a}{h}. \tag{1.7}$$

Таким образом, в логике этого решения коэффициент крепости изначально вводился в задачу как коэффициент трения посредством равенства (1.6), но в ходе решения приобрел вид (1.7) – отношения полупролета a свода обрушения к его высоте h. При всей спорности отдельных положений этого вывода, он, на наш взгляд, заслуживает внимания, во-первых, как теоретическое обоснование коэффициента крепости, данное самим М.М. Протодьяконовым, во-вторых, потому, что этот результат оказалось возможным подтвердить совсем другим путем (см. ниже – п. 2.10).

Решение В. Риттера. Интересен тот факт, что очертание свода обрушения было впервые получено теоретическим путем. В 1879 г. В. Риттером [173] была решена задача о форме свода обрушения, теряющего устойчивость над выработкой. Анализ этого решения можно найти, например, в [12, 33, 49]. Расчетная схема В. Риттера показана на рисунке 1.3.

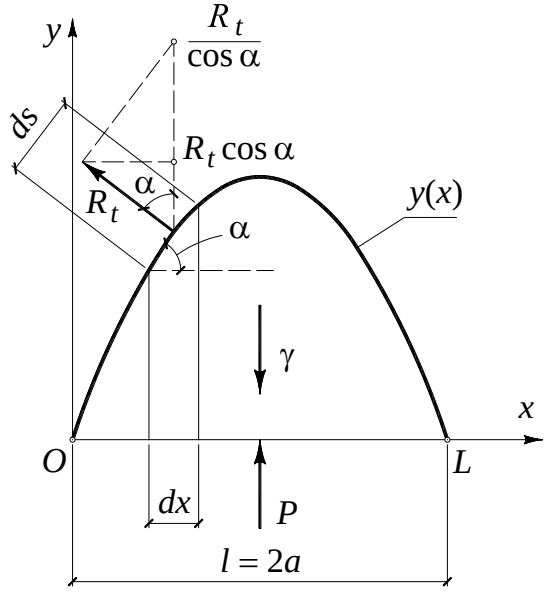


Рисунок 1.3 – Расчетная схема свода обрушения – схема В. Риттера

Свод обрушения ограничен сверху функцией $y(x)$, а снизу – отрезком OL. По контуру свода действуют силы сопротивления грунта, препятствующие отрыву свода от основного массива. В случае если собственный вес свода обрушения

превысит суммарную силу сопротивления грунта, то для удержания свода в равновесии снизу необходимо приложить дополнительную удерживающую силу P [49]. Эта сила будет восприниматься конструкциями подземного сооружения, расположенного сразу под отрезком OL.

Очертание $y(x)$ свода заранее неизвестно. Ставится задача отыскать такую функцию $y(x)$, при которой сила P была бы максимальной.

Составим уравнение равновесия сил на вертикальную ось:

$$P - G + \Sigma R = 0, \tag{1.8}$$

где P – сила, поддерживающая снизу свод от обрушения; G – собственный вес свода обрушения; ΣR – суммарная проекция на ось Oy всех сил сопротивления грунта обрушению, действующих по контуру свода.

Собственный вес свода равен

$$G = \int_0^l \gamma y dx. \tag{1.9}$$

Сопротивление грунта обрушению В. Риттер определил в каждой точке контура нормальным напряжением σ_n, равным величине сопротивления скального грунта одноосному растяжению R_t. В принципе, это можно считать приемлемой гипотезой. Но вертикальную проекцию сил сопротивления грунта по контуру свода В. Риттер записал в виде

$$\Sigma R = \int_0^s \frac{R_t}{\cos\alpha} ds, \tag{1.10}$$

где α – угол наклона касательной к кривой $y(x)$ к оси Ox в точке x; s – длина контура свода обрушения; ds – соответственно, элемент дуги.

И здесь возникает главный вопрос к этому решению. Проекция элементарной силы $R_t ds$ на вертикальную ось, очевидно, равна $R_t ds \cdot \cos\alpha$. Это означает, что выражение (1.10) прямо противоречит правилам векторной алгебры.

Сейчас, когда уже получено решение Я.О. Стахнёва [116], рассмотревшего по контуру свода и нормальные, и касательные напряжения, такой прием В. Риттера можно трактовать как своего рода скрытую гипотезу о существовании до-

полнительных сил сопротивления грунта, которые давали бы проекцию на вертикальную ось. Однако в то время это совсем не было очевидно, и, видимо, послужило причиной того, что от развития решения В. Риттера практически отказались на долгие годы.

Сделав это важное замечание, тем не менее, продолжим разбирать решение В. Риттера. Имея теперь выражения для G и ΣR, подставим их в уравнение равновесия (1.8) и выразим оттуда силу P:

$$P = \int_0^l \gamma y dx - \int_0^s \frac{R_t}{\cos\alpha} ds .$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha ; \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{dy}{dx} \equiv y' ; \qquad ds = \frac{dx}{\cos\alpha}, \tag{1.11}$$

перепишем выражение для P в виде:

$$P = \int_0^l \gamma y - R_t(1 + y'^2) dx . \tag{1.12}$$

Таким образом, искомая сила P представляет собой функционал, зависящий от неизвестной функции $y(x)$.

Задачу максимизации данного функционала В. Риттер выполнил, используя классические методы вариационного исчисления. Максимум функционала $P[y(x)]$ может быть найден из равенства Эйлера:

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 . \tag{1.13}$$

Здесь $F'_y \equiv \partial F/\partial y$ и $F'_{y'} \equiv \partial F/\partial y'$ – частные производные, а F – функция, представляющая собой подынтегральное выражение в правой части (1.12):

$$F(x, y, y') = \gamma y - R_t(1 + y'^2) .$$

Выполнив необходимые действия по дифференцированию функции F, приводим к уравнению:

$$\gamma + 2R_t y''(x) = 0 ,$$

откуда

$$y''(x) = -\frac{\gamma}{2R_t}.$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$y'(x) = -\frac{\gamma}{2R_t} \cdot x + C_1; \qquad y(x) = -\frac{\gamma}{2R_t} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2.$$

Найдем постоянные C_1 и C_2. Контур свода проходит через начало координат: $x = 0$, $y = 0$. Отсюда, согласно второму равенству $C_2 = 0$. В точке с координатой $x = l$ имеем $y = 0$. Из того же равенства имеем: $C_1 = \gamma l/(4R_t)$. Тогда искомая функция, описывающая очертание свода обрушения, примет вид:

$$y(x) = \frac{\gamma x}{4R_t}(l - x). \tag{1.14}$$

Подстановка выражения (1.14) в (1.12) после интегрирования даст искомую величину нагрузки от горного давления:

$$P = \frac{l}{48R_t}(l^2\gamma^2 - 48R_t^2). \tag{1.15}$$

Таким образом, рассмотрев задачу о сводообразовании как задачу вариационного исчисления, В. Риттер получил два важнейших результата [49].

Первое. Наиболее невыгодное очертание свода обрушения имеет форму квадратной параболы (1.14) [49].

Второе. Получена формула (1.15) для равнодействующей P предельного давления грунта на подземное сооружение при сводообразовании [49].

Очертание свода обрушения по квадратной параболе было положительно принято сообществом горняков и тоннельщиков.

Наиболее спорным в решении В. Риттера, конечно же, является то, как был спроецирован на вертикальную ось вектор силы сопротивления грунта по контуру свода (см. рисунок 1.3): $R_t ds/\cos\alpha$ вместо очевидного $R_t ds \cdot \cos\alpha$.

Выше уже говорилось, что после публикации работ Я.О. Стахнёва [116] этот прием приобретает черты скрытой гипотезы – неявной, но, как оказалось, оправданной – о существовании дополнительных, помимо $\sigma_n = R_t$, удерживающих

усилий по контуру свода. Однако дальнейшее развитие направления, заданного В. Риттером, невозможно без устранения этого недостатка.

Другим направлением развития решения В. Риттера является введение в расчетную схему касательных напряжений, действующих по контуру свода обрушения.

Третье направление развития – это введение в расчет описания прочности, более соответствующего современным представлениям о механических свойствах скальных грунтов, чем просто $\sigma_n = R_t$ в каждой точке контура свода.

Об условиях прочности грунтов. Прежде чем переходить к следующим решениям, имеющим значение для настоящей работы, необходимо хотя бы вкратце сказать о тех условиях прочности грунтов, которые будут использоваться и в наших решениях, и использовались в тех решениях, на которые мы опираемся.

Условие прочности дисперсных грунтов, использованное в данной работе, – это классическое условие прочности Кулона-Мора [151]:

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} = (\sigma_x + \sigma_z + 2c\,\mathrm{ctg}\,\varphi)\sin\varphi, \qquad (1.16)$$

где φ – угол внутреннего трения грунта, c – удельное сцепление.

Условие (1.16) записано для прямоугольной декартовой системы координат xOz, потому что решения для дисперсных грунтов будут даваться именно в этих координатах.

Вопрос о прочности скальных грунтов – вопрос более сложный. На практике до недавнего времени прочность скальных грунтов по преимуществу оценивалась только одним параметром – прочностью на одноосное сжатие R_c. С массовым внедрением проектирования программных комплексов (ПК) для геотехнических расчетов в практику постепенно стало проникать условие прочности *Hoek-Brown* [154]:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = R_c \cdot \left(m_b \frac{\sigma_3}{R_c} - s \right)^a, \qquad (1.17)$$

где a, m_b и s – параметры прочности скального грунта.

Параметры a, m_b и s могут быть или определены в непосредственных испытаниях, или вычислены по формулам:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(e^{-\frac{GSI}{15}} - e^{-\frac{20}{3}} \right), \qquad m_b = m_i e^{\frac{GSI-100}{28-14D}}, \qquad s = e^{\frac{GSI-100}{9-3D}}, \qquad (1.18)$$

где GSI – геологический коэффициент прочности; m_i – параметр свойств материала ненарушенной скалы; D – коэффициент «нарушенности» скального грунта.

Формулы (1.18) часто сразу «зашиты» в программные комплексы, например, в *PLAXIS* и в *Optum G*2. В некоторых программах, например, в ПК *MIDAS GTS NX*, есть возможность задавать напрямую параметры a, m_b и s.

Основное достоинство условия прочности *Hoek-Brown*, по нашему мнению, состоит в том, что оно позволяет учитывать нелинейную зависимость сопротивления скального грунта сдвигу от достигнутого уровня напряжений. Иначе говоря, учитывает нелинейность графика сдвига.

Что касается формул (1.18), то, как показывает практика расчетов, они обладают качеством, которое одновременно является и их достоинством, и недостатком. Достоинство состоит в том, что для GSI, m_i и D составлены специальные таблицы и номограммы, которые сразу в виде подсказок присутствуют в программных комплексах. Имея описание грунта и технологии сооружения подземной конструкции, можно без труда подобрать нужные значения этих параметров, не выходя из расчетной программы. Недостаток состоит в том, что, например, по первой из формул (1.18) параметр a может изменяться только в пределах от 0,67 до 0,5, поскольку GSI меняется в пределах от 0 до 100. Такая ограниченность значений может оказаться препятствием при описании прочности некоторых скальных грунтов.

Еще одной чертой условия *Hoek-Brown* (1.17) является то, что разности главных напряжений поставлено в соответствие значение третьего главного напряжения σ_3. В то же время более удобным и наглядным является форма записи условий прочности в виде:

$$\tau = \tau(\sigma),$$

где τ и σ – полуразность и полусумма главных напряжений σ_1 и σ_3.

В отечественной геомеханике есть своя, достаточно богатая традиция описания прочности скальных грунтов. Обратимся, в частности, к ГОСТ 21153.8-88 [24], регламентирующему построение паспорта прочности скального грунта. Согласно этому ГОСТ, вначале определяется прочность грунта на одноосное сжатие R_c, потом на одноосное растяжение R_t, после чего выполняется ряд испытаний на объемное сжатие, в результате которых получают несколько пар предельных главных напряжений σ_1 и σ_3. Пары значений (R_t, 0), (0, R_c), (σ_3, σ_1) определяют предельные круги Мора (пар значений σ_3, σ_1 может быть несколько), к которым проводят огибающую (рисунок 1.4).

Для огибающей ГОСТ 21153.8-88 рекомендует уравнение:

$$\tau_n = \tau_{\max} \cdot \left(\frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2 + a^2} \right)^{3/8}, \qquad (1.19)$$

где τ_{max} – касательное напряжение при гипотетически полностью закрывшихся трещинах и порах под действием нормального давления σ_n; $\sigma_k = R_t + \sigma_n$ – нормальное напряжение относительно начала координат, перенесенного в точку пересечения огибающей с осью $O\sigma_n$; a – параметр кривой.

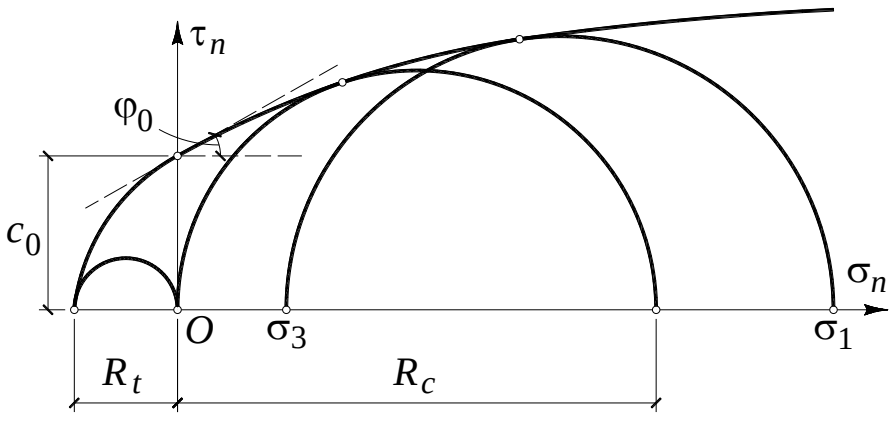


Рисунок 1.4 – Паспорт прочности скального грунта по ГОСТ 21153.8-88

В работе Я.О. Стахнёва [116], к анализу которой мы сейчас перейдем, принято несколько видоизмененное условие прочности:

$$\tau_n = C_0\left(1-\frac{|\sigma_n|}{|R_t|}\right)^m, \qquad (1.20)$$

где C_0 – аналог удельного сцепления; m – параметр, который определяет кривизну огибающей предельных кругов Мора.

В наших исследованиях будем придерживаться условия прочности (1.20), принятого Я.О. Стахнёвым, с поправкой на правило знаков – в решениях для скальных грунтов положительными будем считать растягивающие напряжения.

Решение Я.О. Стахнёва для пологих сводов в скальных грунтах. Как уже говорилось, решение В. Риттера получило развитие в последние годы, благодаря работам Я.О. Стахнёва [116], в которых указанные выше недостатки решения В. Риттера были устранены.

На рисунке 1.5, *а*, изображена общая схема к решению Я.О. Стахнёва, которая, в принципе, повторяет нормативную схему [116].

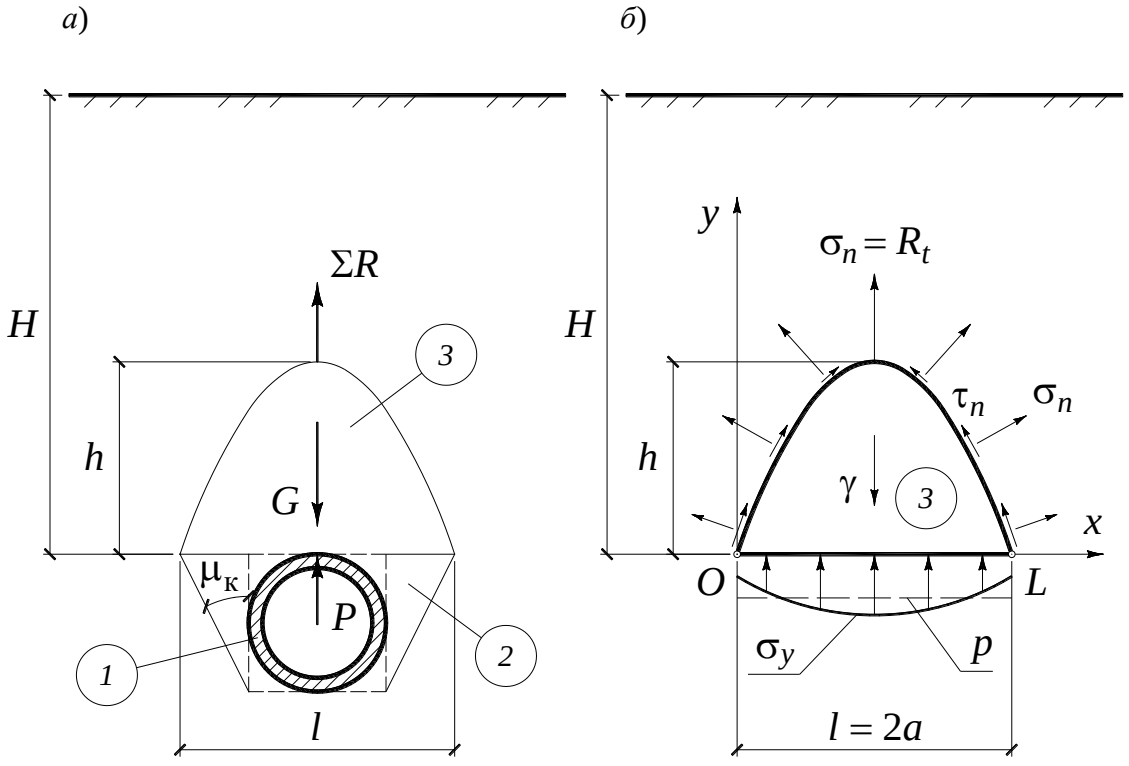


Рисунок 1.5 – Общая схема к решению Я.О. Стахнёва для скальных грунтов [116] (*1* – подземное сооружение, *2* – боковые призмы обрушения, *3* – свод обрушения): *а* – схема с указанием сил, действующих на свод; *б* – схема с напряжениями

Здесь обозначено: $\mu_к = \pi/4 - \varphi_к/2$. Общее уравнение равновесия свода записывается, как и в решении В. Риттера, в виде (1.8). Обозначения, принятые в (1.8), сохранены.

На рисунке 1.5, *б*, представлена более детальная расчетная схема свода обрушения высотой h и пролетом $l = 2a$. Там же показаны напряжения и удельный вес грунта. Я.О. Стахнёвым было сделано принципиально важное дополнение к схеме В. Риттера – по контуру свода действуют и нормальные напряжения σ_n, и касательные τ_n. Снизу свод поддерживают напряжения σ_y, а среднее напряжение на участке OL, очевидно, равно:

$$p = \frac{1}{l \times 1}\int_0^l \sigma_y dx\,.$$

Эпюра предельных вертикальных напряжений σ_y по границе OL будет нами определяться лишь в решении для дисперсных грунтов, поэтому здесь она приведена просто «для полноты картины».

Как и у В. Риттера, в решении Я.О. Стахнёва свод весом G стремится обрушиться в выработку, этому обрушению препятствует суммарная сила сопротивления грунта отрыву ΣR, а поддерживающая снизу сила P и будет являться величиной нагрузки от горного давления на подземное сооружение [116].

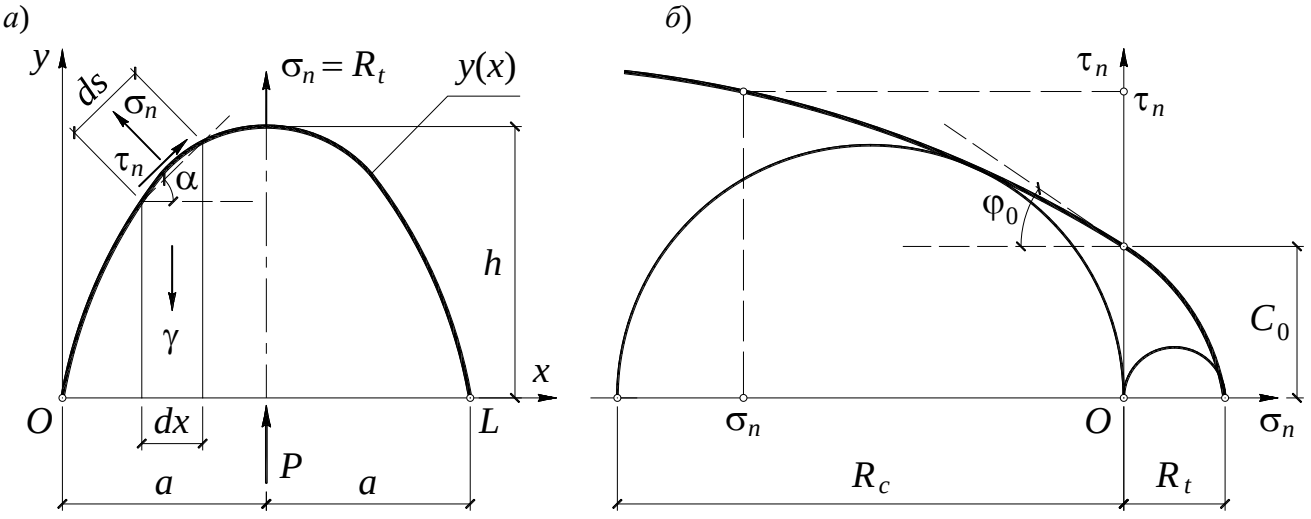


Рисунок 1.6 – Расчетная схема Риттера-Стахнёва (*а*) и паспорт прочности скального грунта (*б*)

Излагая основные положения работы Я.О. Стахнёва, внесем два изменения по сравнению с оригиналом: примем иную, чем в оригинале, систему координат,

и примем положительными растягивающие напряжения. Учтем, что расчетная схема симметрична относительно линии $x = a$, и станем составлять уравнения только для левой ее половины (рисунок 1.6, *а*).

Собственный вес свода обрушения определяется интегралом:

$$\frac{1}{2}G = \int_0^a \gamma y dx . \tag{1.21}$$

Проекция сил сопротивления на вертикальную ось составит:

$$\frac{1}{2}\Sigma R = \int_0^{s/2} \sigma_n \cos\alpha + \tau_n \sin\alpha ds ,$$

или, учитывая равенства (1.11), полностью справедливые и в этом случае,

$$\frac{1}{2}\Sigma R = \int_0^a \sigma_n + y'\tau_n dx . \tag{1.22}$$

Подставив выражения (1.21) и (1.22) в уравнение равновесия (1.8), выразим оттуда силу P предельного давления грунта на подземные конструкции:

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma y - \sigma_n - y'\tau_n dx . \tag{1.23}$$

В данном уравнении искомая сила P зависит от неизвестной функции $y(x)$ очертания свода обрушения и двух неизвестных функций $\sigma_n(x)$ и $\tau_n(x)$ распределения нормальных и касательных напряжений по контуру свода [116].

Поскольку рассматривается задача о предельном равновесии свода обрушения, и по контуру действуют предельные напряжения σ_n и τ_n, Я.О. Стахнёв предложил связать их уравнением (1.20) огибающей предельных кругов Мора, которое перепишем с учетом принятого правила знаков [116]:

$$\tau_n = C_0\left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m , \tag{1.24}$$

где R_t – прочность грунта на одноосное растяжение, $R_t > 0$.

Подстановка (1.24) в (1.23) дает:

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma y - \sigma_n - y' C_0 \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m dx. \qquad (1.25)$$

Теперь сила P зависит уже только от двух неизвестных функций – $y(x)$ и $\sigma_n(x)$.

Я.О. Стахнёву удалось решить три проблемы, которые были в решении В. Риттера: вопрос с проецированием сил на вертикальную ось, учет касательных напряжений по контуру свода обрушения, введение в расчет условия прочности скального грунта. Однако далее, в отличие от В. Риттера, Я.О. Стахнёв отказался от применения аппарата вариационного исчисления. Вместо этого он ввел две дополнительные гипотезы относительно неизвестных функций.

Первая из принятых им гипотез касалась формы свода обрушения, которую Я.О. Стахнёв, опираясь на результаты В. Риттера, принял по квадратной параболе:

$$y(x) = \frac{hx}{a^2}(2a - x). \qquad (1.26)$$

Важно подчеркнуть, что высота h свода обрушения является заранее неизвестной величиной, которая определится только в результате решения.

Вторая гипотеза устанавливала распределение нормальных напряжений по контуру свода обрушения:

$$\sigma_n(x) = R_t \cos\alpha. \qquad (1.27)$$

Суть этой гипотезы в следующем. В верхней точке свода касательные напряжения в силу симметрии расчетной схемы равны нулю: $\tau_n = 0$. Соответственно, в этой точке можно предположить одноосное растяжение, и тогда нормальные напряжения равны $\sigma_n = R_t$. Поскольку очертание свода принято по параболе, то в этой точке, очевидно, $\alpha = 0$.

Далее, «двигаясь» по контуру свода вниз, номальные напряжения будут уменьшаться, и в пределе согласно (1.27) $\sigma_n \to 0$ при $\alpha \to \pi/2$. Заметим, что, в соответствии с (1.24), если $\sigma_n \to 0$, то $\tau_n \to C_0$. Физически это означает, что свод обрушения, теряя устойчивость, будет вести себя как абсолютно твердое тело и будет перемещаясь вниз, не создавая распора.

Итак, подставив (1.26) и (1.27) в (1.25), получим выражение для P в виде функции от высоты h свода обрушения:

$$\frac{1}{2}P(h)=\int_0^a \frac{\gamma h}{a^2}(2ax-x^2)-\frac{R_t}{\sqrt{1+y'^2}}\cos\alpha - y'C_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^m dx, \quad (1.28)$$

где

$$y'=\frac{2h}{a^2}(a-x).$$

В диссертации Я.О. Стахнёва сама схема решения обосновывается следующим образом.

С одной стороны, при малых h, свод обрушения будет обладать настолько незначительным весом, что даже при небольшой прочности грунта сил сопротивления хватит, чтобы удержать его в равновесии. С другой стороны, свод большой высоты будет иметь большую площадь соприкосновения с окружающим массивом по боковым поверхностям, и по этой площади силы трения будут настолько велики, что смогут удержать свод даже большого веса. Соответственно, можно ожидать, что существует такая высота свода, когда его вес будет уже достаточно большим, а сил сопротивления по боковой поверхности окажется недостаточно для его удержания [116].

Таким образом, решение Я.О. Стахнёва сводилось к поиску такой высоты h свода, при которой соотношение веса G свода и удерживающих сил ΣR будет максимально неблагоприятным. Иначе говоря, ставилась задача поиска максимума функции $P(h)$.

Основные результаты решения Я.О. Стахнёва. На рисунке 1.7 показаны функции $p(h)$, где $p(h) = P(h)/(l \times 1)$ – среднее давление. Величины $P(h)$ рассчитывались по формуле по (1.28). Значения R_c даны по модулю.

Данные приводятся в относительных переменных: $\gamma = 1$ – единица объёмного веса, $a = 1$ – единица длины; соответственно γa – единица напряжений. Параметры огибающей (1.24) предельных кругов Мора: $R_t = -0{,}1R_c$, $C_0 = -0{,}25R_c$, $m = 0{,}44$ [116]. В этих равенствах принято, что $R_c < 0$.

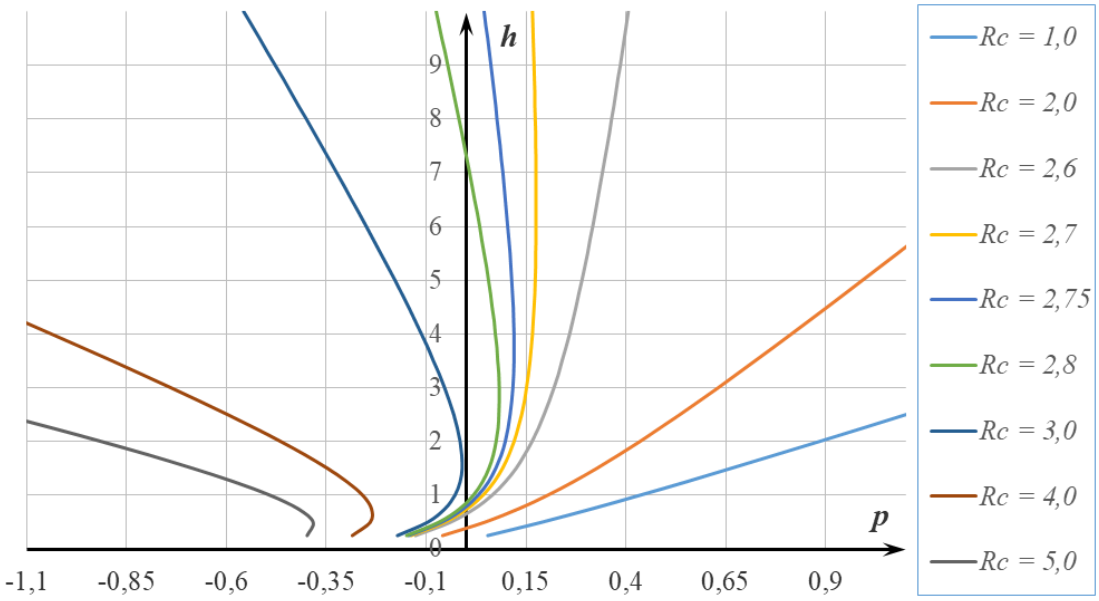


Рисунок 1.7 – Графики $p(h)$ для различных значений R_c

Анализируя полученные данные, Я.О. Стахнёв выделил три типа графиков $p(h)$.

Первый тип. Давление $p < 0$ при любом h. Обрушения не происходит, поскольку суммарные силы сопротивления грунта всегда превышают вес свода обрушения. На рисунке – это кривые $R_c = 3…5$.

Второй тип. Максимум функции $p(h)$ находится в области $p > 0$. Это означает, что существует свод обрушения высотой h_{cr}, для удержания которого в равновесии необходимо снизу приложить давление, равное $p(h_{cr})$. На рисунке – это кривые $R_c = 2{,}7…2{,}8$.

Третий тип. Функция $p(h)$ неограниченно возрастает при $h \to \infty$. Это означает, что без поддерживающего давления $p = \gamma H$, где H – глубина заложения тоннеля (см. рисунок 1.5), произойдет обрушение грунта в выработку. Другими словами, речь идет о формировании над выработкой, не свода, а столба обрушения.

Таким образом, Я.О. Стахнёвым был сделан важный вывод о том, что в зависимости от соотношения пролета свода обрушения (а в конечном итоге – ширины выработки) и прочности грунта существует три типа напряженного состояния грунта над выработкой [116]:

1) грунт полностью устойчив, и крепления выработки не требуется;

2) над выработкой формируется свод обрушения, и для обеспечения его устойчивости необходимо приложить удерживающую силу, равную весу свода (теоретически – за вычетом сил сопротивления) [116];

3) над выработкой образуется столб обрушения, и удержание грунта возможно, только если приложить удерживающее давление, равное весу столба обрушения до дневной поверхности грунта [116] (за вычетом сил сопротивления).

Развивая эту мысль, Я.О. Стахнёв предложил ввести в теорию сводообразования понятие о двух критических пролетах выработки для любой, наперед заданной прочности грунта. Первый критический пролет $l_{1кр}$ разделял полностью устойчивое состояние грунта ($l < l_{1кр}$) и состояние, при котором формируется свод обрушения ($l > l_{1кр}$). Второй критический пролет $l_{2кр}$ разделял ситуацию с формированием свода обрушения ($l < l_{2кр}$) и столба обрушения ($l > l_{2кр}$) [116].

Другой важный результат анализируемого решения состоял в том, что можно найти максимум функции $p(h)$ – или, что в данном случае то же самое, $P(h)$ – для заданного значения R_c если такой максимум существует. Вычислив эти максимумы, Я.О. Стахнёвым они были объединены в зависимости $P(R_c)$. На эти графики в дальнейшем мы будем много ссылаться, поэтому в целях экономии объема текста сейчас их не приводим.

Таким образом, Я.О. Стахнёву удалось теоретически обосновать явление образования над выработками свода обрушения и столба обрушения, устранив основные недостатки решения В. Риттера. Вместе с тем, Я.О. Стахнёв ввел в решение две дополнительные гипотезы, от которых, как будет показано в настоящей работе, можно избавиться.

О решении Я.О. Стахнёва для подъемистых сводов в полускальных грунтах. Я.О. Стахнёв справедливо предположил, что гипотеза (1.27) не будет работать в полускальных грунтах, где формируются более подъемистые своды. В таких сводах может возникать распор, по крайней мере, в нижней их части, а распределение напряжений (1.27) исключает возможность возникновения распора в принципе. Поэтому для подъемистых сводов в полускальных грунтах Я.О.

Стахнёв построил специальное решение методом элементарного горизонтального слоя.

Однако, отказавшись от гипотезы (1.27), Я.О. Стахнёв сохранил гипотезу (1.26) о параболическом очертании свода обрушения, но так же с заранее неизвестной высотой h. Кроме того, в этом решении пришлось вводить дополнительный параметр – коэффициент бокового давления K_0 [116].

Поскольку в настоящей диссертации это решение не используется, то подробно на нем останавливаться не станем. Скажем лишь, что основные выводы по этой схеме совпадают с тем, что было получено Я.О. Стахнёвым для пологих сводов. Три наиболее выжных вывода:

1) удалось смоделировать распор грунта в нижней части свода;

2) значения силы P предельного давления по результатам данного решения оказались в целом выше, чем для пологих сводов;

3) значения силы P предельного давления в существенной степени зависят от коэффициента K_0 бокового давления.

Некоторые решения для дисперсных грунтов. Сводообразование в дисперсных грунтах обычно исследуется с использованием аппарата теории предельного равновесия грунтов. Основные положения теории предельного равновесия будут, хотя и кратко, изложены ниже – в п. 1.3. Здесь же перечислим основные решения, которые получили распространение в литературе.

Первая – это тривиальное решение вокруг круговой выработки I краевой задачи (рисунок 1.8, *а*). Эта схема рассматривается, например, в [14].

Недостатком этого решения является то, что его невозможно использовать для оценки предельного воздействия грунта на крепь подземной выработки. Согласно этой схеме, величина давления грунта на крепь является граничным условием и может быть задана теоретически сколь угодно большой [14, 15, 116].

Вторая схема была предложена К.В. Руппенейтом [91]. Здесь рассмотрено построение поля предельных напряжений в области, примыкающей к своду обрушения извне (рисунок 1.8, *б*). Таким образом, непосредственное применение этой схемы к расчету предельной нагрузки на крепь тоннеля также невозможно.

Однако, как было показано Я.О. Стахнёвым [116], сама компоновка краевых задач, разработанная К.В. Руппенейтом, с некоторыми корректировками может быть использована для основной задачи – задачи определения горного давления на конструкции тоннелей.

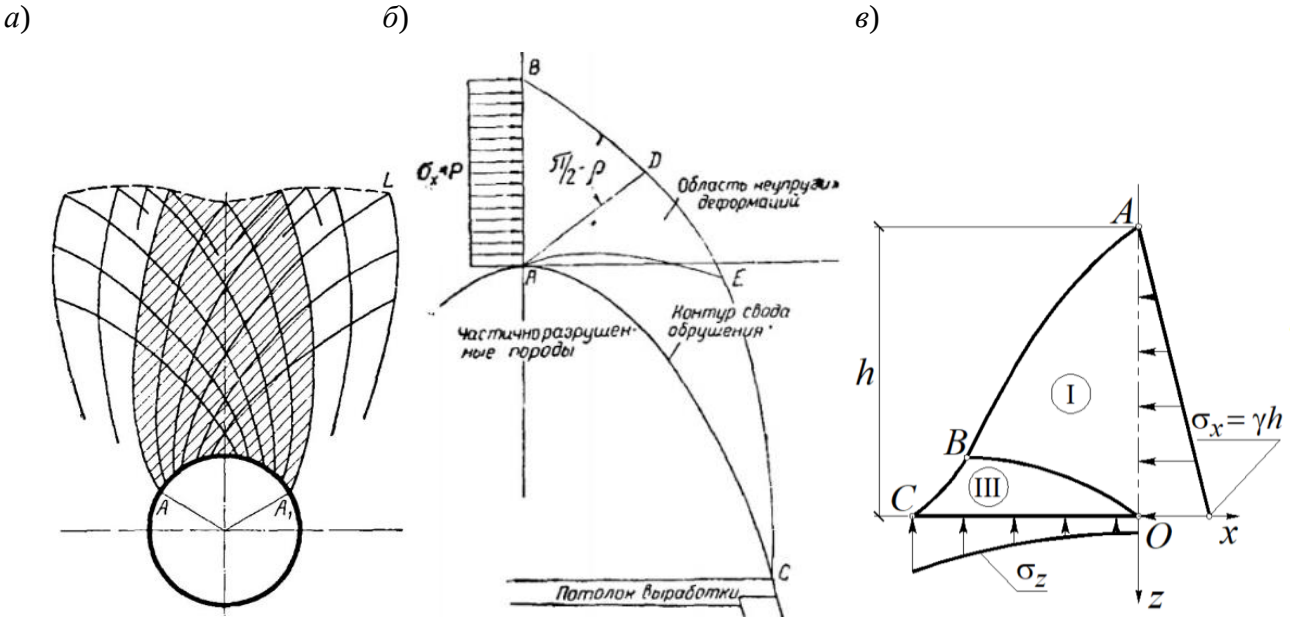


Рисунок 1.8 – Решения ТПР задачи о сводообразовании в дисперсных грунтах:
а – тривиальное решение; *б* – решение К.В. Руппенейта; *в* – решение Я.О. Стахнёва

Третья схема была решена Я.О. Стахнёвым. Она изображена на рисунке 1.8, *в*, где цифрами показаны номера краевых задач. Это решение имеет два источника. Первый источник технический – это решения А.О. Кузнецова о предельном напряженном состоянии грунта вокруг круглого стержня [53]. Второй источник имеет характер принципиальной идеи – это аналогия с предельным давлением грунта на подпорные стенки (рисунок 1.9). Поскольку в настоящей работе решение Я.О. Стахнёва будет адаптировано для криволинейных подземных сооружений, то было бы правильно сказать хотя бы несколько слов об аналогии с подпорными стенками.

Как известно, если абсолютно гладкая и жесткая стенка помещена в грунт так, что НДС массива не нарушено, то горизонтальное давление грунта на стенку – это так называемое давление покоя: $\sigma_x = \xi_0 \gamma z$, где ξ_0 – коэффициент бокового давления покоя, z – ордината точки, где вычисляется боковое давление. Если,

например, справа от стенки началась разработка котлована, но неподвижность стенки обеспечена, то давление грунта на стенку не изменится. И только в том случае, если стенка начнет деформироваться, давление грунта на стенку начнет меняться [116].

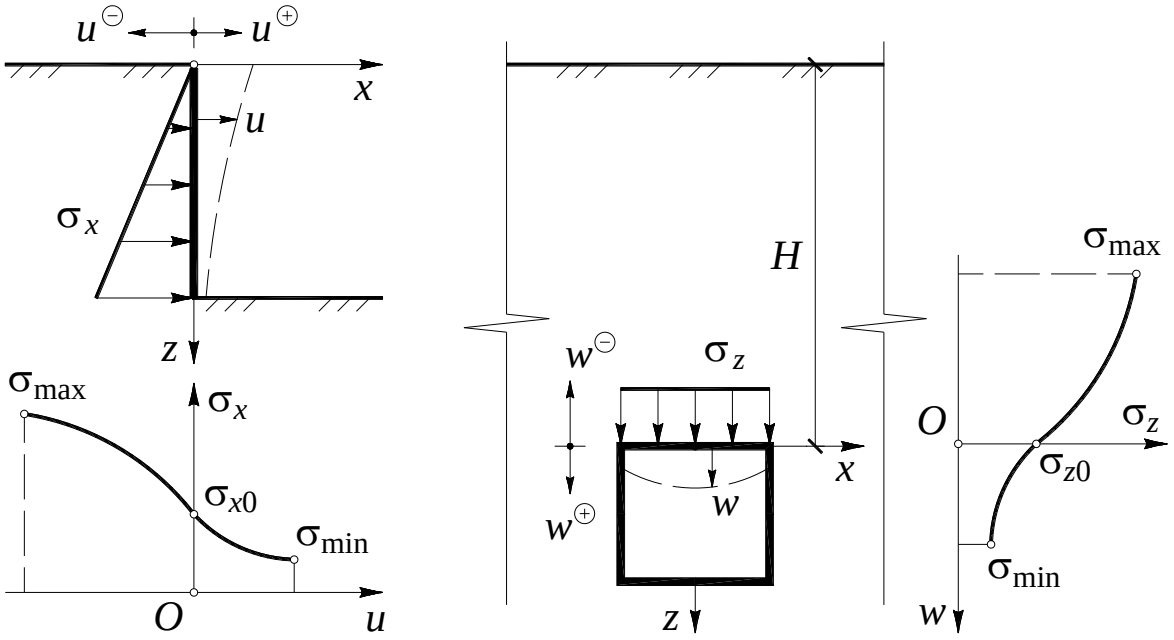


Рисунок 1.9 – Аналогия между предельным давлением на подпорные стенки и горным давлением на подземные сооружения в дисперсных грунтах по Я.О. Стахнёву [116]

Если стенка отходит от грунта $u > 0$, то давление грунта уменьшается. Наконец, когда перемещения стенки достигнут определенных значений, грунт за стенкой обрушится, и в момент, предшествующий этому обрушению, давление грунта на стенку становится предельным и называется активным давлением. Это – минимальное значение σ_{min}. Если стенка начнет перемещаться в сторону грунта $u < 0$, то давление грунта на стенку будет расти, пока не произойдет выпирания грунта за стенкой. В этот момент давление грунта на стенку есть пассивное давление. Это – максимальное значение σ_{max} [116].

Аналогичные процессы можно наблюдать в подземных сооружениях.

Если верхний элемент (предположим, горизонтальный) подземной конструкции абсолютно гладкий и жесткий, и его устройство в грунте выполнено настолько щадящим образом, что НДС вмещающего массива не изменилось, то

давление грунта на этот верхний элемент – это давление покоя, равное $\sigma_z = \gamma H$, где H – глубина заложения сооружения [116].

Если верхний элемент подземной конструкции начнет перемещаться вниз $w > 0$, то давление грунта на него будет падать. При некотором значении такого перемещения произойдет вывал грунта в выработку. В предшествующий этому момент имеем предельное давление грунта на подземное сооружение. Это – минимальное значение σ_{min} [116].

Если верхний элемент конструкции будет перемещаться вверх $w < 0$, то либо произойдет выпирание грунта на поверхность (при неглубоком залегании подземного сооружения), либо над выработкой сформируются области предельного равновесия (пластических деформаций) без выхода на поверхность. В этот момент взаимодействие грунта и подземной конструкцией будет характеризоваться максимальным давлением σ_{max} [116].

В принципе, и σ_{min}, и σ_{max} – это горное давление в узком смысле слова по А.А. Борисову. При проектировании подземных сооружений в большинстве случаев интересует минимальное давление σ_{min}.

Таким образом, Я.О. Стахнёв пришел к выводу, что если «повернуть» на 90° расчетную схему задачи об активном давлении, то можно решить задачу о горном давлении σ_{min} в дисперсных грунтах, что и было им с успехом реализовано.

Отметим, что в последнее время китайские ученые активно используют аналогию между поведением грунта за подпорными стенками и в массиве, вмещающем глубоко расположенные подземные сооружения [178]. Хотя у них содержание этой аналогии несколько иное, сам по себе факт применения такой же аналогии показателен.

Результаты полученного решения были Я.О. Стахнёвым обстоятельно проанализированы и сопоставлены с результатами и экспериментов, и аналогичных решений, полученных численными методами – методом конечных элементов (МКЭ) и методом предельного анализа (МПА). Среди прочего, Я.О. Стахнёву удалось решить проблему постановки граничных условий в этой задаче.

Естественным обобщением решения Я.О. Стахнёва будет решение задачи о своде обрушения, формирующимся в дисперсных грунтах над криволинейным подземным сооружением. Это решение будет описано в главе 3.

1.3. Основные численные методы в расчетах подземных сооружений

Общие положения. В настоящей диссертации будут использоваться следующие численные методы:

– метод конечных элементов (МКЭ);

– метод предельного анализа (МПА);

– метод конечных разностей в рамках метода характеристик теории предельного равновесия (ТПР) грунтов.

Все эти методы достаточно хорошо известны и освещены в литературе, поэтому скажем о них лишь кратко и то, что существенно для разрабатываемых далее решений.

Первое, что надо сказать, это то, что последние четверть века идет верификация численных методов на всех реальных объектах подземного строительства. Эта верификация носит и целенаправленный, и стихийный характер. Ряд задач, к которым относятся и задачи о горном давлении, до конца еще «не поддается» численным методам. Дело может быть даже не в том, что тот или иной численный метод не в состоянии «решить задачу» (хотя и это возможно), а в том, что нужно, например, правильным образом задать граничные условия.

Итак, при получении какого-либо нового аналитического решения есть смысл сопоставить его результаты с результатами численных решений. Фактически речь идет о взаимной верификации. Если результаты совпадают, то это становится основанием больше доверять и полученной аналитике, и конкретной численной модели применительно к данному классу задач. Если результаты не совпадают – это основание искать ошибки и там, и там. А также дополнительно анализировать и исходные данные, и элементы расчетных схем, по которым обнаружено расхождение.

Второе. МКЭ, МПА и метод характеристик ТПР, если так можно выразиться, находятся в неравных условиях.

МКЭ – это метод, уже прошедший широчайшую апробацию на геотехнических задачах. Зачастую перед началом расчета примерно понятно, чего можно ожидать, соответственно, основной вопрос – в границах его применимости и способах его использования.

МПА – метод, вошедший в обиход практиков геотехников сравнительно недавно, и здесь сопоставление с любой новой задачей – это, конечно, прежде всего, взаимная верификация, но не только. Учитывая стабильность, которую демонстрирует МПА в задачах о предельной нагрузке на грунтовые массивы, он может давать результаты, которые вне этого метода получить крайне тяжело, при этом доверие к этим результатам будет достаточно высоким. Другими словами, результаты расчета МПА могут обладать самостоятельной научной ценностью.

Метод характеристик ТПР – это метод, используемый в научно-исследовательских задачах о предельном напряженном состоянии грунтовых массивов. Решения, полученные этим методом, почти всегда обладают научной новизной. Результаты таких решений обычно стараются довести до вида, удобного для практического использования – формулы, аппроксимирующие полученные результаты численных решений, таблицы и номограммы. Степень доверия к решениям ТПР обычно очень высока.

Метод конечных элементов. К этому методу мы будем обращаться в виду его чрезвычайной популярности в практической геотехнике и подземном строительстве. Для нас он ценен даже не сам по себе, а как инструмент, который находится в руках у каждого расчетчика. Поэтому появление практически любого нового решения неизбежно вызывает в принципе вполне резонный вопрос о том, можно ли было эту задачу решить с помощью МКЭ, и если – да, то нужно ли было вообще получать то самое новое решение?

С другой стороны, такой одновременно и универсальный, и доступный инструмент может помочь быстро получить ответы на частные промежуточные вопросы, возникающие при решении той или иной задачи. Например, в работе [53] с

помощью МКЭ был получен деформированный вид системы «стержень – грунт», на основании чего нельзя было получить окончательного решения, но стало возможным «настроить» метод характеристик ТПР, правильным образом определив последовательность краевых задач.

МКЭ посвящено огромное количество работ. Среди отечественных ученых, внесших наибольший вклад в развитие МКЭ следует, прежде всего, упомянуть Бугрова А.К. [13], Парамонова В.Н. [82], Ухова С.Б. [120], Фадеева А.Б. [121], Федоровского В.Г. [122], Шашкиных А.Г. и К.Г. [142] и многих других.

Кратко опишем схему метода в простейшем ее варианте для условий плоской задачи. Расчетная область разбивается на конечные элементы – это геометрические фигуры, которые контактируют друг с другом только в узлах, а их внутренняя площадь «заполнена» материалом. Для каждого элемента составляется матрица узловых сил $\{F\}$ и матрица узловых перемещений $\{\delta\}$, которые связывают уравнением:

$$\{F\} = [k]\{\delta\}, \tag{1.29}$$

где $[k]$ – матрица жесткости конечного элемента, равная

$$[k] = [B]^T [D][B]S .$$

Здесь $[B]$ – геометрическая матрица элемента, состоящая из координат узлов конечного элемента; $[D]$ – физическая матрица, которая включает в себя механические характеристики среды; S – площадь фигуры конечного элемента.

Затем для всей расчетной области определяется глобальная матрица жесткости $[K]$ (процедура составления ансамбля по О. Зенкевичу [35]), глобальная матрица узловых сил $\{R\}$ и узловых перемещений $\{\Delta\}$, которые связываются общей системой уравнений:

$$\{R\} = [K]\{\Delta\}.$$

Решив данную систему уравнений относительно перемещений $\{\Delta\}$, по геометрическим и физическим уравнениям вычисляют деформации и напряжения в каждом элементе или узле конечно-элементной сетки.

Обратим внимание на один нюанс важный для наших решений. В выводе уравнения для [k] в прямом виде участвуют:

– геометрические уравнения, или уравнения Коши, связывающие деформации и перемещения матрицей [B];

– физические уравнения, или уравнения состояния, связывающие напряжения и деформации матрицей [D];

– уравнение работ, связывающее узловые силы и перемещения в узлах конечного элемента, с одной стороны, с напряжениями и деформациями внутри конечного элемента, с другой стороны.

Уравнение работ гарантирует равновесие элемента, находящегося под действием узловых сил. Однако, напряжения получают пересчетом из перемещений, и как показывают некоторые исследования [40], такой подход не всегда гарантирует выполнение равновесия отдельных областей расчетной схемы, по крайней мере, в области пластических деформаций, особенно при использовании условия прочности *Hoek-Brown*.

Причина этого до конца не установлена. Но это является прямым нарушением одного из основных законов механики. Именно поэтому результаты расчетов МКЭ нужно с особой тщательностью контролировать, в том числе с использованием других методов.

Отметим, что у Я.О. Стахнёва [116] приводятся результаты проверки равновесия как раз в задаче о сводообразовании. Им показано, что в тех решениях, где особенно заметно нарушается равновесие, величины рассчитанной предельной нагрузки противоречат не только оценкам, полученным другими методами, но и демонстрируют внутренние противоречия – например, плавное изменение прочностных параметров приводит к хаотичному изменению значений предельной нагрузки.

В данной диссертации с помощью МКЭ будет решаться идеально-упругопластическая задача с условием прочности *Hoek-Brown* для скальных грунтов и условием прочности Кулона-Мора для дисперсных.

Метод предельного анализа. В МПА расчетная область также разбивается на конечные элементы, но для них записываются совсем другие уравнения. Развитие МПА, прежде всего, связано с именами С.В. Слоана и А.В. Лямина [163]. В нашей стране очень близкие решения получил А.М. Караулов [41].

В конечно-элементной дискретизации в МПА нумерация узлов своя для каждого элемента, что означает, что один и тот же узел имеет разные номера, в зависимости от конечного элемента, которому он принадлежит (рисунок 1.10).

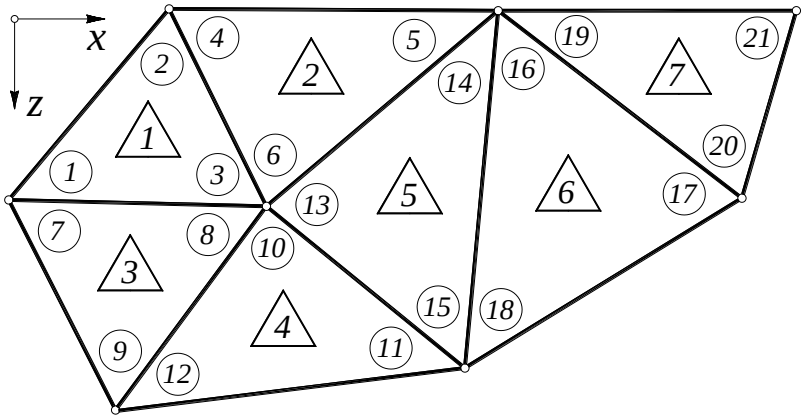


Рисунок 1.10 – Дискретизация расчетной области в МПА и нумерация узлов и элементов

В отличие от МКЭ в МПА даже в простейшем варианте напряжения задаются как линейные функции координат в пределах каждого конечного элемента. В пределах каждого конечного элемента в прямоугольной декартовой системе координат xOz выражения для напряжений имеют вид (рисунок 1.11, *а*):

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^{3} N_i \sigma_{xi}, \qquad \sigma_z = \sum_{i=1}^{3} N_i \sigma_{zi}, \qquad \tau_{xz} = \sum_{i=1}^{3} N_i \tau_{xzi}.$$

где N_i – функции формы элемента, аналогичные тем, что используются в МКЭ для перемещений:

$$N_1 = \frac{a_1 - b_1 x - c_1 z}{\Delta}; \qquad N_2 = \frac{a_2 - b_2 x - c_2 z}{\Delta}; \qquad N_3 = \frac{a_3 - b_3 x - c_3 z}{\Delta}.$$

Здесь:

$$a_1 = x_2 z_3 - x_3 z_2, \qquad b_1 = z_3 - z_2, \qquad c_1 = x_2 - x_3;$$

$$a_2 = x_3 z_1 - x_1 z_3, \qquad b_2 = z_1 - z_3, \qquad c_2 = x_3 - x_1;$$

$$a_3 = x_1 z_2 - x_2 z_1, \qquad b_3 = z_2 - z_1, \qquad c_3 = x_1 - x_2;$$

$$\Delta = 2A^e = x_2 z_3 + x_1 z_2 + z_1 x_3 - z_2 x_3 - x_1 z_3 - z_1 x_2,$$

где A^e – площадь треугольного элемента; x_1, z_1, x_2, z_2, x_3, z_3 – координаты его вершин (узлов).

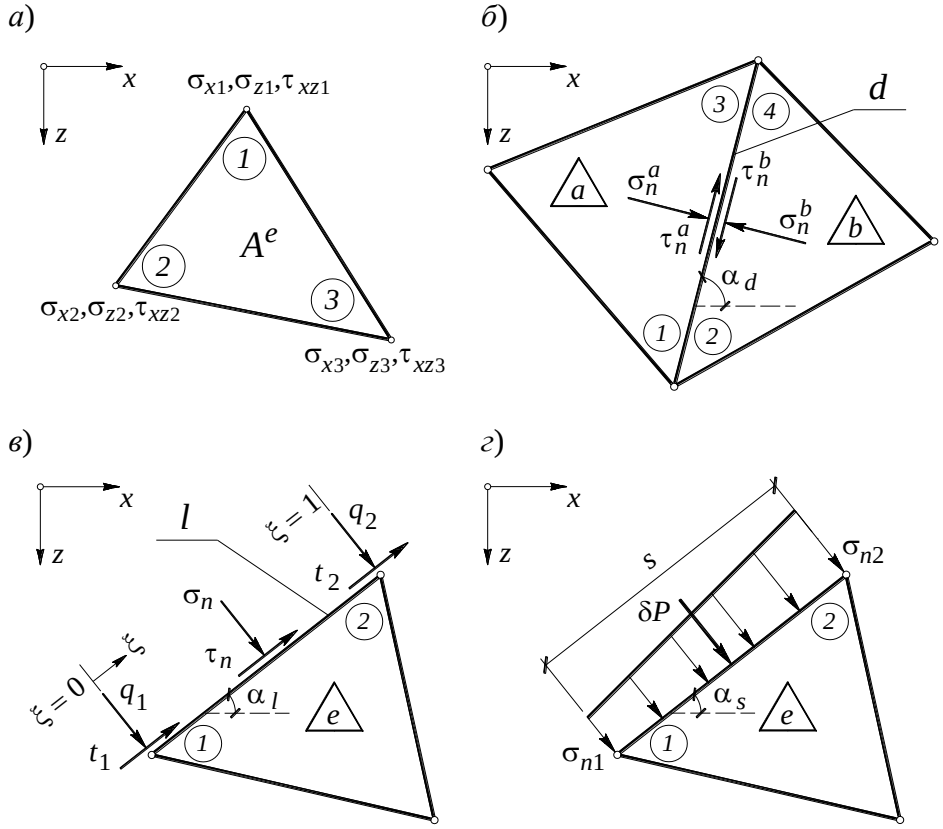


Рисунок 1.11 – Схемы к выводу уравнений МПА:
а – равновесия внутри элемента; *б* – равновесия между элементами;
в – равновесия на границе; *г* – для границы с искомой предельной нагрузкой

Тогда дифференциальные уравнения равновесия для каждого элемента могут быть записаны в виде:

$$[A^e_{equil}]\{\sigma^e\} = \{b^e_{equil}\}, \tag{1.30}$$

где

$$[A^e_{equil}] = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -b_1 & 0 & -c_1 & -b_2 & 0 & -c_2 & -b_3 & 0 & -c_3 \\ 0 & -c_1 & -b_1 & 0 & -c_2 & -b_2 & 0 & -c_3 & -b_3 \end{bmatrix};$$

$$\{\sigma^e\}^T = \{\sigma_{x1} \quad \sigma_{z1} \quad \tau_{xz1} \quad \sigma_{x2} \quad \sigma_{z2} \quad \tau_{xz2} \quad \sigma_{x3} \quad \sigma_{z3} \quad \tau_{xz3}\};$$

$$\{b^e_{equil}\}^T = \{0 \quad \gamma\}.$$

Далее формулируется требование равновесия на контакте между элементами: в примыкающих друг к другу элементах *a* и *b* нормальные и касательные напряжения на границе *d* между ними должны быть равны между собой:

$$\sigma_n^a = \sigma_n^b; \qquad \tau_n^a = \tau_n^b.$$

Поскольку в пределах элемента напряжения изменяются линейно, то для этого достаточно потребовать равенства напряжений соответственно в узлах *1* и *2* и в узлах *3* и *4*:

$$\sigma_n^1 = \sigma_n^2; \qquad \tau_n^1 = \tau_n^2; \qquad \sigma_n^3 = \sigma_n^4; \qquad \tau_n^3 = \tau_n^4.$$

Свяжем эти напряжения с неизвестными σ_x, σ_z τ_{xz} зависимостями, хорошо известными из теории напряженного состояния в точке:

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\sigma_x(1-\cos 2\alpha_d) + \frac{1}{2}\sigma_z(1+\cos 2\alpha_d) + \tau_{xz}\sin 2\alpha_d;$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha_d - \frac{1}{2}\sigma_z \sin 2\alpha_d + \tau_{xz}\cos 2\alpha_d.$$

Теперь уравнения равновесия на границе между элементами примут вил:

$$[A_{equil}^d]\{\sigma^d\} = \{b_{equil}^d\}, \tag{1.31}$$

где

$$[A_{equil}^d] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & a_5 & a_6 & -a_4 & -a_5 & -a_6 \end{bmatrix};$$

$$\{\sigma^d\}^T = \{\sigma_{x1}^a \quad \sigma_{z1}^a \quad \tau_{xz1}^a \quad \sigma_{x2}^b \quad \sigma_{z2}^b \quad \tau_{xz2}^b \quad \sigma_{x3}^a \quad \sigma_{z3}^a \quad \tau_{xz3}^a \quad \sigma_{x4}^b \quad \sigma_{z4}^b \quad \tau_{xz4}^b\};$$

$$\{b_{equil}^d\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}.$$

Здесь обозначено:

$$a_1 = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha_d); \qquad a_2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha_d); \qquad a_3 = \sin 2\alpha_d;$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\sin 2\alpha_d; \qquad a_5 = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha_d; \qquad a_6 = \cos 2\alpha_d.$$

Граничные условия записываются в принципе аналогичным образом. Принимая на границе расчетной области линейное изменение внешнего давления, имеем (рисунок 1.11, *в*):

$$\sigma_n = q_1 + \xi(q_2 - q_1); \qquad \tau_n = t_1 + \xi(t_2 - t_1),$$

где ξ – локальная координата, равная нулю в точке *1* и единице в точке *2*; q_1, t_1, q_2, t_2 – значения внешнего давления, нормального и касательного к линии *l*, в точках *1* и *2* соответственно.

Ясно, что $q_1 = \sigma_{n1}$, $t_1 = \tau_{n1}$, $q_2 = \sigma_{n2}$, $t_2 = \tau_{n2}$. Тогда применив уже использованные формулы для σ_n и τ_n, получим

$$[A^l_{bound}]\{\sigma^l\} = \{b^l_{bound}\}, \tag{1.32}$$

где

$$[A^l_{bound}] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix}; \qquad \{b^l_{bound}\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ t_1 \\ q_2 \\ t_2 \end{Bmatrix};$$

$$\{\sigma^l\}^T = \{\sigma^e_{x1} \quad \sigma^e_{z1} \quad \tau^e_{xz1} \quad \sigma^e_{x2} \quad \sigma^e_{z2} \quad \tau^e_{xz2}\}.$$

При вычислении значений a_1, a_2, …, a_6 необходимо выполнить замену α_d на α_l.

Перейдем к рассмотрению того участка границы, на котором действует искомая предельная нагрузка:

$$P = \int_S \sigma_n dS,$$

где *S* – длина границы с искомой нагрузкой.

Любой малый участок *s* границы есть грань какого-либо элемента на контуре (рисунок 1.11, *г*). для этого участка можем записать:

$$\delta P = \frac{1}{2} s(\sigma_{n1} + \sigma_{n2}),$$

или, в матричном виде,

$$\delta P = \{c^s\}^T \{\sigma^s\}, \tag{1.33}$$

где

$$\{c^s\}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3\};$$

$$\{\sigma^s\}^T = \{\sigma_{x1} \quad \sigma_{z1} \quad \tau_{xz1} \quad \sigma_{x2} \quad \sigma_{z2} \quad \tau_{xz2}\}.$$

Здесь при вычислении значений a_1, a_2, …, a_6 следует использовать α_s.

Далее на искомые напряжения следует наложить ограничение $f \le 0$, например, в виде условия текучести Кулона-Мора:

$$f = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} - (\sigma_x + \sigma_z + 2c \cdot \operatorname{ctg}\varphi)\sin\varphi \le 0. \qquad (1.34)$$

Формулировка требования $f \le 0$ в таком виде ведет к потере линейности уравнений. В ранних работах основоположник этого метода С. Слоан (*S.W. Sloan*) [163, 164] прибегал к линеаризации условия текучести. Впоследствии, по мере развития МПА, от линеаризации отказались.

Итак, уравнения равновесия

– внутри каждого элемента (1.30),

– на границе между элементами (1.31),

– на внешней границе расчетной области (1.32)

представляют систему ограничений-равенств.

К этим уравнениям добавляется ограничение-неравенство (1.34), формализующее условие невыхода напряжений за пределы поверхности текучести.

Далее из указанных ограничений-равенств и ограничений-неравенств формируются общие матрицы $[A]$, $\{b\}$ и $\{c\}$ и ставится задача поиска статически допустимого поля напряжений, при котором искомая нагрузка достигает максимума. Таким образом, формулируется задача линейного или динамического программирования – поиск максимума функции цели

$$\Phi = \{c\}^T\{\sigma\} \to \max$$

при ограничениях:

$$[A]\{\sigma\} \le \{b\},$$

где

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{x1} \quad \sigma_{z1} \quad \tau_{xz1} \quad \sigma_{x2} \quad \sigma_{z2} \quad \tau_{xz2} \quad \ldots \quad \sigma_{xN} \quad \sigma_{zN} \quad \tau_{xzN}\}.$$

Далее решается система линейных (или нелинейных) ограничений-равенств и ограничений-неравенств с заданной функцией цели, а полученная в результате решения искомая предельная нагрузка называется нижней оценкой предельной нагрузки.

Данный метод реализован в программном комплексе *Optum G2*.

Как следует из приведенных уравнений, МПА реализует жесткопластическую задачу.

Метод характеристик ТПР. Сама ТПР имеет очень богатую историю. Простой перечень ученых, внесших даже самый весомый вклад, будет внушительным. Тем не менее, говоря о ТПР грунтов, нельзя не упомянуть такие фамилии как В.Г. Березанцев [8, 9], И.Б. Башмаков [10], Г.А. Гениев [20], С.С. Голушкевич [22], В.П. Дыба [31], А.И. Калаев [38], А.М. Караулов [39-41], К.В. Королев [45-49], М.В. Малышев [71, 72], В.И. Новоторцев [45], Ю.А. Соболевский [103], В.В. Соколовский [104], Ю.И. Соловьев [105, 106], Л.Р. Ставницер [112-114], А.С. Строганов [117-119], В.Г. Федоровский [122], В.А. Флорин [125], А.К. Черников [139], A. Balla [145], J. Biarez [146, 147], A. Bishop [148], J. Brinch Hansen [149], A. Caquot & J. Kerisel [167], W.F. Chen & G.Y. Baladi [150], A.D. Cox [152, 153], A. Haar & T. von Karman [155], M.E. Harr [132], H. Hencky [156], R. Hill [133], Josselin de Jong [157], F. Ketter [158, 159], H. Lundgren & K. Mortensen [162], J. Mandel [166], C.M. Martin [167], G.G. Meyerhof [168], L. Prandtl [169], W. Rankine [171], H. Reissner [172], J. Salençon [174], R.T. Shield [175], A.S. Vesic [176] и др.

Исходная система уравнений ТПР грунтов в прямоугольной декартовой системе координат *xOz* имеет вид [45, 104]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = X\,, \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = Z\,;$$

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau^2_{xz}} = (\sigma_x + \sigma_z + 2c \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi)\sin\varphi\,,$$

где X и Z – проекции объемной силы на координатные оси (в принятой системе координат $X = 0$, $Z = \gamma$ – удельный вес грунта); φ и c – угол внутреннего трения и удельное сцепление грунта.

Первые два уравнения представляют собой уравнения равновесия, третье – условие прочности грунта – закон Кулона-Мора.

Для решения практических задач эту систему обычно приводят к каноническому виду [45, 104, 116]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = \operatorname{tg}(\alpha \pm \mu), & \mu = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}; \\ d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg}\varphi\, d\alpha = \gamma(dz \mp dx \operatorname{tg}\varphi). \end{cases} \tag{1.35}$$

где α – угол наклона первого главного напряжения к оси Oz, а σ – среднее приведенное напряжение вычисляемые как

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_x}, \qquad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + c \cdot \operatorname{ctg}\varphi .$$

Компоненты предельных напряжений выражают через эти два параметра:

$$\left.\begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_z \end{matrix}\right\} = \sigma(1 \mp \sin\varphi \cos 2\alpha); \qquad \tau_{xz} = \sigma \sin\varphi \cdot \sin 2\alpha . \tag{1.36}$$

Уравнения (1.35) представляют собой диффернциальные уравнения характеристик $z(x)$ двух различных семейств и дифференциальные уравнения изменения параметров α и σ вдоль этих характеристик. Физический смысл характеристик – это линии скольжения.

Численное решение задач ТПР грунтов сводится к интегрированию канонических уравнений методом конечных разностей по характеристикам в рамках той или иной последовательности краевых задач.

Более подробно описывать метод характеристик ТПР нет необходимости, т.к. их можно найти в многочисленной литературе [45, 104].

1.4. Вариационное исчисление в задачах подземного строительства

В области геотехники вариационные методы применяются, как правило, для установления экстремального очертания линий скольжения [16, 30, 33, 106]. Особое значение это имеет при оценке устойчивости откосов и склонов. По существу, здесь необходимо решить две задачи – определение очертания линии скольжения

и силовое взаимодействие внутри сдвигаемой части массива грунта. Эти задачи пока решаются раздельно. В практических расчетах до сих пор применяются традиционные формы линий скольжения – прямые, отрезки окружностей или логарифмических спиралей. Впервые экстремальное очертание линии скольжения вариационным методом было предложено Ю.И. Соловьевым для частного случая гипотетического грунта [106].

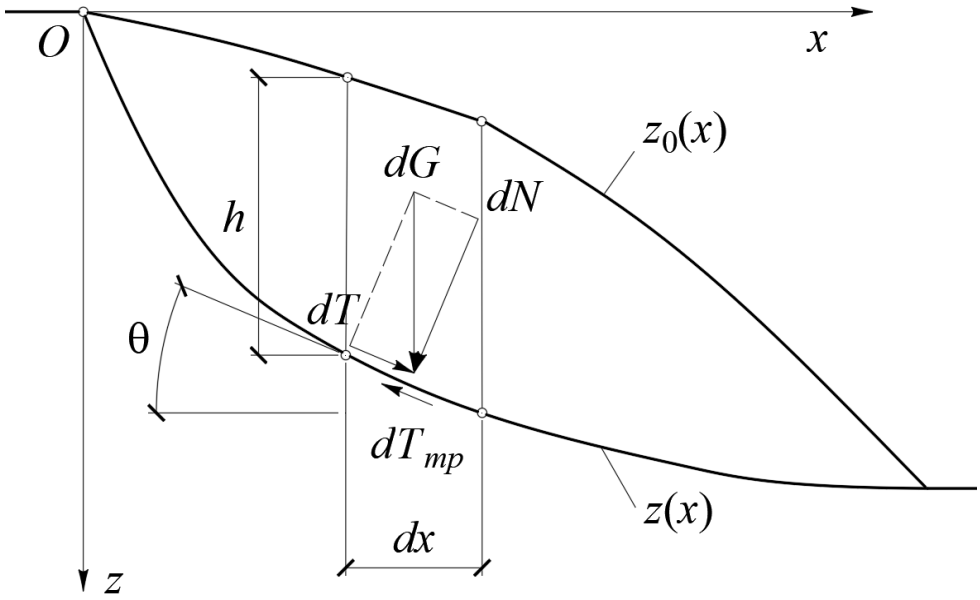


Рисунок 1.12 – Расчетная схема Ю.И. Соловьева к вариационному решению задачи об устойчивости склонов

На рисунке 1.12 показаны поверхность склона $z_0(x)$ и искомая линия скольжения $z(x)$. К бесконечно малой вертикальной полоске высотой h и шириной dx приложены малые силы: ее вес dG, который раскладывается на сдвигающую силу dT и нормальную к линии скольжения силу dN, и удерживающая сила трения dT_{mp}, которая действует по подошве отсека:

$$dG = \gamma h dx; \qquad dT = dG\sin\theta; \qquad dN = dG\cos\theta; \qquad dT_{mp} = dN\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{c dx}{\cos\theta}.$$

Приращение запаса устойчивости дается разностью:

$$dQ = dT_{mp} - dT\,.$$

Для обеспечения минимального запаса устойчивости первая производная от dQ по θ приравнивается нулю:

$$\frac{d}{d\theta}(dQ) = -\gamma h\left(\operatorname{tg}\varphi \cdot \sin\theta + \cos\theta\right)dx + \frac{c\sin\theta}{\cos^2\theta}dx = 0.$$

Результат данного уравнения:

$$\frac{c}{\gamma h} = \left(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\theta\right)\cos^2\theta.$$

приводит к кубическому дифференциальному уравнению первого порядка функции $z(x)$:

$$cz'^3 + \left(c + \gamma z_0 \operatorname{tg}\varphi\right)z' - \gamma \operatorname{tg}\varphi \cdot z \cdot z' - \gamma z + \gamma z_0 = 0.$$

Задаваясь начальной точкой, можно получить экстремальную линию скольжения, соответствующую минимальному запасу устойчивости. Для откосов такой точкой обычно является первая горизонтальная точка их подошвы.

Дальнейшее развитие вариационных решений задачи устойчивости откосов и склонов было выполнено в работах М.Н. Гольдштейна [9], А.Г. Дорфмана [30] и А.В. Жабко [33] для общего случая дисперсного грунта, в том числе с учетом трещины отрыва, образующейся в верхней части сдвигаемого массива.

В отношении силового взаимодействия внутри сдвигаемой части склона экстремальные решения были рассмотрены Карауловым А.М. в работах [39] с применением симплекс-метода для расчетной схемы метода отсеков (рисунок 1.13).

Для каждого i-го отсека рассматривалась полная система сил – по боковой поверхности Q_{i-1} и Q_i, по подошве R_i, а также равнодействующая массовых сил и внешней нагрузки P_i. Для всех отсеков составлялась система линейных неравенств, обеспечивающих положение точек приложения указанных сил внутри отсеков и обеспечивающих выполнение условия прочности грунта на сдвиг. Эта система дополнялась линейными уравнениями статического равновесия. В качестве функционала в данных решениях принималось суммарное сопротивление сдвигу по линии скольжения, если речь шла об устойчивости склона, или же оползневое давление на ограждение, если сдвигаемый массив удерживался подпорной стенкой (на рисунке 1.13 условно обозначено пунктиром).

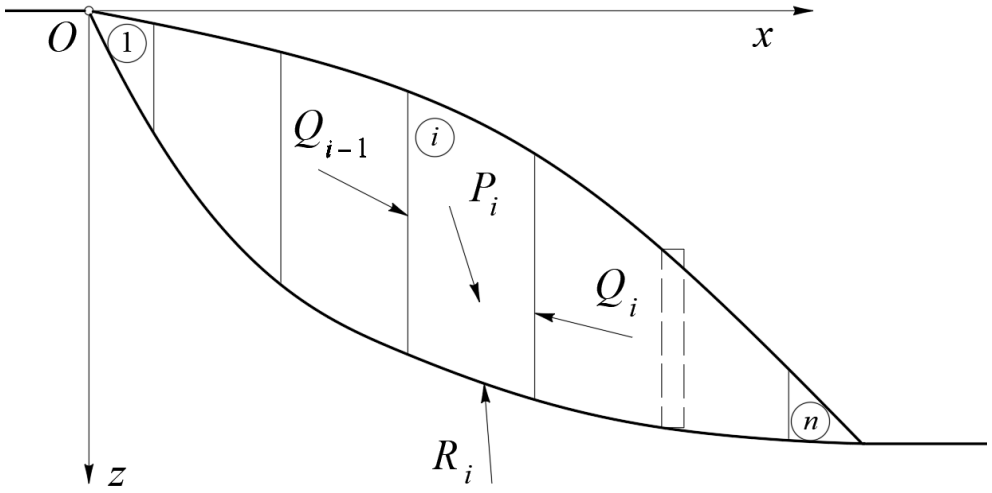


Рисунок 1.13 – Схема к решению задачи устойчивости склонов симплекс-методом

В качестве аргумента выступала функция сил взаимодействия, распределенных по отсекам и представленная в данном решении в дискретном виде. Таким образом, симплекс-методом определялась наиболее невыгодная в отношении устойчивости система сил.

Особый интерес представляет применение вариационного подхода к решению задачи устойчивости стенок водозаборных скважин (рисунок 1.14).

Водоносный пласт удерживается от обрушения избыточным давлением воды q, величина которого определяется в зависимости от нагрузки p, действующей на кровлю. Зависимость между q и p устанавливается статическим решением осесимметричной задачи теории предельного равновесия грунтов в области OAB. Нагрузка p на кровлю OB определяется вариационным методом с помощью уравнений Эйлера.

Функционалом в данном случае является нагрузка на кровлю. В качестве аргументов принимаются функции – уравнение купола обрушения $z(r)$ и распределение нормальных напряжений по куполу $\sigma(r)$. Касательные напряжения τ даются законом Кулона. В результате вариационного решения было получено прямолинейное очертание зоны обрушения в виде усеченного конуса с углом φ при вершине, а также величина давления на кровлю водоносного пласта p:

$$p = \frac{\pi}{3}[3(\gamma a - c)(a^2 - r_0^2) - 2\gamma(a^3 - r_0^3)]\operatorname{ctg}\varphi .$$

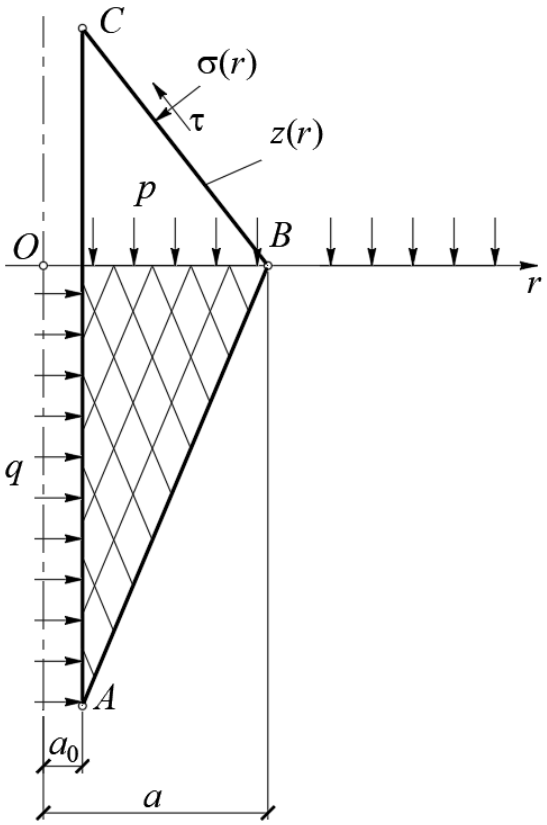


Рисунок 1.14 – Схема к определению купола обрушения грунта при проходке водозаборных скважин

Кроме того, было установлено критическое значение радиуса $a = a_{кр}$, меньше которого обрушение отсутствует. Это значение определяется кубическим уравнением:

$$\gamma a^3 + 3ca^2 - 3\gamma r_0^2 a + (c + 2\gamma r_0) r_0^2 = 0 .$$

Данное решение с успехом применялось при устройстве водозаборных скважин.

В заключении, возвращаясь к двум основным задачам – определению экстремальной линии скольжения и силового взаимодействия внутри сдвигаемого массива – можно сказать, что совместное решение этих задач, в определенном смысле, реализовано в программе *Optum G2*, в рамках которой наиболее надежно моделируется поведение массива горных пород в предельном состоянии. По крайней мере, сказанное относится к задачам устойчивости откосов и склонов, сложенных дисперсными грунтами, прочность которых описывается законом Кулона-Мора.

Выводы по главе 1

1. Теории горного давления одно из очень многочисленных и разветвленных приложений механики деформируемого твердого тела. Это обусловлено, прежде всего, тем, что горное дело – одна из старейших отраслей промышленности. Среди теорий горного давления нас интересует теория сводообразования, поскольку она стала основной теоретической базой расчета нагрузок от горного давления на подземные сооружения в тоннеле- и метростроении.

2. Три основные положения классической теории сводообразования:

– схема Протодьяконова-Цимбаревича;

– коэффициент крепости, по которому рассчитывают размеры свода и боковых призм обрушения;

– шкала М.М. Протодьяконова, которая ставит в соответствие описанию грунта значение *f*.

Главная проблема здесь – отсутствие прямых методов определения *f* и отсутствие теоретического обоснования этой величины. В теоретическом отношении в задаче о сводообразовании наиболее значимых результатов достигли В. Риттер и спустя более, чем 100 лет, – Я.О. Стахнёв.

3. В решении В. Риттера были установлены очертание свода обрушения и величина необходимой поддерживающей силы. Однако в самом решении существуют три проблемы – во-первых, по контуру не учитывались касательные напряжения, во-вторых, при проецировании сил сопротивления грунта на вертикальную ось применен прием, прямо противоречащий правилам векторной алгебры, в-третьих, прочность скального грунта трактовалась слишком упрощенно, поскольку сводилась лишь к одной величине – прочности на одноосное растяжение R_t.

4. Эти недостатки были устранены Я.О. Стахнёвым, который дал статический анализ устойчивости свода обрушения на базе паспорта прочности скального грунта. Кроме того, им было дано, по сути, теоретическое обоснование *f*, а также получен целый ряд интересных результатов. В то же время, Я.О. Стахнёву пришлось ввести в решение две дополнительные гипотезы. Кроме того, Я.О.

Стахнёвым было дано специальное решение для дисперсных грунтов, полученное в рамках ТПР.

5. Поставленные в диссертации задачи планировалось решать аналитически. Однако поскольку современная практика расчетов в подземном строительстве немыслима без численных методов, сразу была поставлена задача продублировать теоретические решения численными методами. Были использованы три метода:

– метод конечных элементов (МКЭ) как самый распространенный в практических расчетах;

– метод предельного анализа (МПА) как метод наиболее корректно работающий с задачами о предельным напряженном состоянии грунтовых массивов;

– метод характеристик теории предельного рановесия (ТПР) грунтов как наиболее строгий метод решения задач о предельном напряженном состоянии дисперсных грунтов; это основной метод в решении для дисперсных грунтов.

6. Дан обзор решений задач устойчивости грунтовых массивов как задач вариационного исчисления. И хотя таких исследований не так много, каждое из них стало крупным достижением в механике грунтов, геотехнике и подземном строительстве.

7. Таким образом, по результатам выполненного анализа литературных источников были сформулированы следующие задачи исследований:

– решить задачу о сводообразовании в рамках расчетной схемы Риттера-Стахнёва методами вариационного исчисления;

– распространить это решение на случай подземных сооружений с верхним элементом криволинейного очертания (например, крепь калотты);

– решить эту же задачу для дисперсных грунтов;

– выполнить взаимную проверку полученных теоретических решений МКЭ и МПА;

– по результатам полученных решений, взаимной верификации с численными методами, сопоставлением с данными замеров напряжений на реальных объектах и сопоставлением с апробированными нормативными методиками, разработать практическую методику.

ГЛАВА 2. ВАРИАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СВОДА ОБРУШЕНИЯ

2.1. Постановка задачи вариационного исчисления

Ряд положений, изложенных в данном пункте, повторяет материал п. 1.2, однако автор сознательно пошел на такие повторы, чтобы сохранить целостность изложения материала 2-й главы.

На рисунке 2.1 показана расчетная схема свода обрушения, который формируется над подземным сооружением глубокого заложения в скальных грунтах [65, 70, 165]. Контур свода обрушения сверху описывается функцией $y(x)$, заранее неизвестной, а снизу – линией OL, которая, предположим, совпадает с верхней плоскостью подземного сооружения (подземной выработки). Соответственно, подземное сооружение или подземная выработка находятся ниже линии OL. Длину отрезка OL обозначим как $l = 2a$.

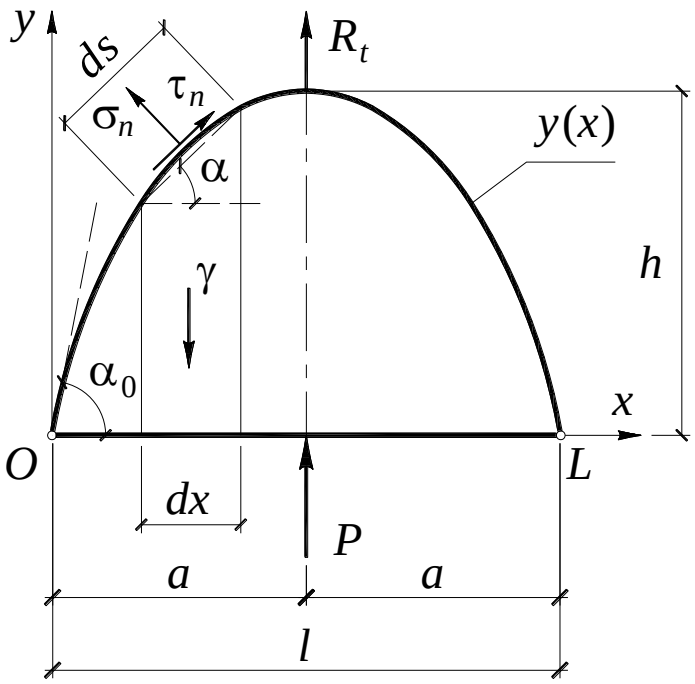


Рисунок 2.1 – Расчетная схема свода обрушения

Свод стремится обрушиться в выработку под действием собственного веса. Этому препятствуют силы сопротивления грунта, возникающие по границе свода обрушения – линии $y(x)$. Это сопротивление в каждой точке контура свода определяется нормальными и касательными напряжениями – σ_n и τ_n. В самой верхней точке симметричного свода имеем одноосное растяжение: $\sigma_n = R_t$, $\tau_n = 0$.

В случае если вес свода окажется больше, чем суммарное сопротивление грунта обрушению, то для удержания его в равновесии необходимо снизу (по границе OL) приложить дополнительную удерживающую силу P. Эта сила, очевидно, будет являться равнодействующей вертикального давления свода обрушения на конструкции подземного сооружения.

Выполним статический анализ устойчивости свода обрушения.

Запишем уравнение равновесия свода обрушения в проекции на ось Oy:

$$P = G - \Sigma R, \tag{2.1}$$

где G – собственный вес свода обрушения, ΣR – проекция на вертикальную ось сил сопротивления грунта обрушению свода.

Далее будем записывать уравнения для левой половины симметричной расчетной схемы.

Итак, собственный вес свода обрушения определится из равенства [65]:

$$\frac{1}{2}G = \int_0^a \gamma y dx, \tag{2.2}$$

где γ – удельный вес грунта.

Половина вертикальной проекции суммы сил сопротивления грунта по контуру свода составит:

$$\frac{1}{2}\Sigma R = \int_0^{s/2} \sigma_n \cos\alpha + \tau_n \sin\alpha ds, \tag{2.3}$$

где s – длина контура свода обрушения; α – угол наклона касательной к контуру $y(x)$; ds – элемент дуги контура.

Принимая во внимание, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} \equiv y' \qquad \text{и} \qquad ds = \frac{dx}{\cos\alpha}, \tag{2.4}$$

выполним замену переменной интегрирования в уравнении (2.3):

$$\frac{1}{2}\Sigma R = \int_0^a \sigma_n + y'\tau_n dx.$$

Тогда уравнение равновесия (2.1) примет вид [49, 116]:

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma y - \sigma_n - y'\tau_n dx. \tag{2.5}$$

В этом уравнении три неизвестные функции [49]: уравнение $y(x)$ контура свода обрушения и две функции, описывающие распределение нормальных $\sigma_n(x)$ и касательных $\tau_n(x)$ напряжений, действующих по контуру свода.

Уменьшим количество неизвестных в этом уравнении, связав между собой нормальные и касательные напряжения (см. п. 1.2). Поскольку речь идет о предельном напряженном состоянии, то в соответствии с имеющимися представлениями о прочности скальных грунтов свяжем напряжения σ_n и τ_n уравнением огибающей предельных кругов Мора, которая определяется при построении паспорта прочности скального грунта.

Подробнее о паспорте прочности скального грунта и его роли при построении решений задач о сводообразования речь шла в 1-й главе. Не повторяясь, приведем здесь лишь принципиальный вид паспорта прочности (рисунок 2.2) и уравнение огибающей предельных грунтов Мора, которое как раз и связывает нормальные и касательные напряжения [116, 50]:

$$\tau_n = C_0\left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m, \tag{2.6}$$

где C_0 и m – параметры кривой, которые могут быть вычислены по результатам обработки опытных данных, получаемых при испытаниях скального грунта на прочность.

Методика опытного определения предельных кругов Мора и построения паспортов прочности для скальных грунтов регламентирована ГОСТ [24]. Сама

огибающая может быть описана различными функциями, поэтому уравнение (2.6), которое использовалось Я.О. Стахневым [116] и будет использоваться в настоящей работе, может быть представлено и в каком-либо ином виде.

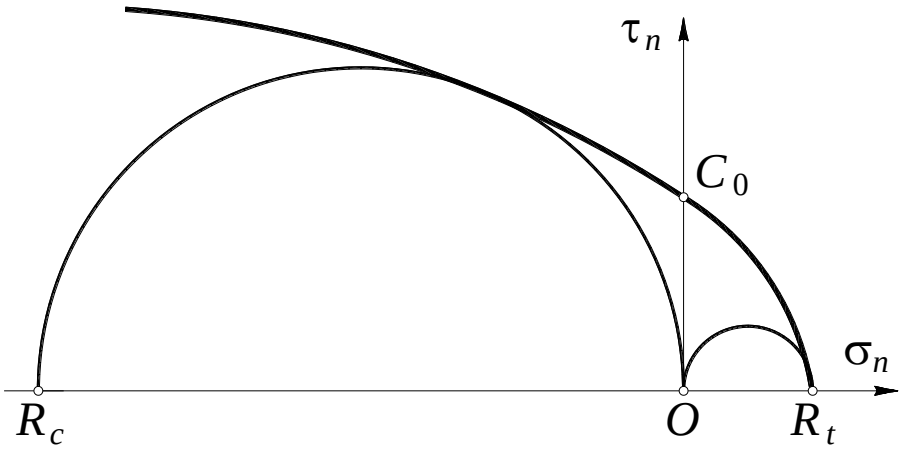


Рисунок 2.2 – Паспорт прочности скального грунта
(R_c – прочность скального грунта на одноосное сжатие)

Объединяя уравнения (2.5) и (2.6), придем к равенству:

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma y - \sigma_n - y' C_0 \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m dx\,. \qquad (2.7)$$

Согласно уравнению (2.7), сила P, необходимая для удержания свода обрушения в равновесии, зависит от двух неизвестных функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$. Поставим задачу отыскать такие функции $y(x)$ и $\sigma_n(x)$, при которых сила P будет максимальной.

Таким образом, сила P представляет собой функционал двух неизвестных функций, а отыскание экстремума P – это классическая задача вариационного исчисления.

2.2. Три варианта решения задачи об устойчивости свода обрушения

Напомним, что в работах Я.О. Стахнёва [116] был избран иной путь решения этой задачи – в обход вариационного исчисления. Для этого Я.О. Стахнёвым было введено две гипотезы относительно неизвестных функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$.

Первая. Очертание свода обрушения принималось по квадратной параболе, но с заранее неизвестной высотой h, которая определялась в результате решения – поиска максимума силы P предельного давления. В принятой системе координат (см. рисунок 2.1) уравнение контура свода обрушения имеет вид:

$$y(x) = \frac{hx}{a^2}(2a - x). \tag{2.8}$$

Вторая. Распределение нормальных напряжений по контуру свода принималось по гипотезе:

$$\sigma_n(x) = R_t \cos\alpha. \tag{2.9}$$

В настоящей работе предпринята попытка последовательного отказа от гипотез (2.8) и (2.9). В соответствии с этим рассмотрим три варианта решения поставленной задачи (рисунок 2.3).

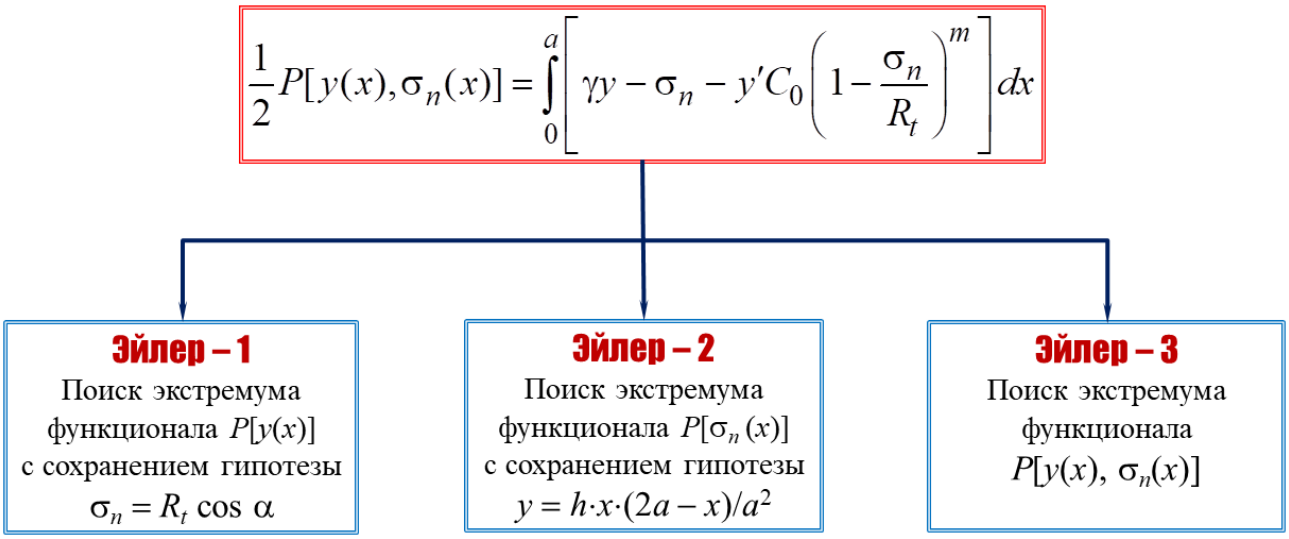


Рисунок 2.3 – Три варианта решения задачи о сводообразовании

Поскольку основным инструментом при отыскании экстремумов в этом классе задач являются формулы Эйлера из вариационного исчисления, то варианты решения будем условно именовать «Эйлер – 1», «Эйлер – 2» и «Эйлер – 3».

Первый вариант решения поставленной задачи, или «**Эйлер – 1**», заключается в поиске экстремума функционала $P[y(x)]$ при заданном распределении (2.9) напряжений σ_n. Иначе говоря, ставится задача отыскания функции $y(x)$,

определяющей такой контур свода обрушения, при котором величина P максимальна.

Второй вариант, или «**Эйлер – 2**», сводится к поиску экстремума функционала $P[\sigma_n(x)]$ с сохранением гипотезы (2.8) о параболическом очертании свода. Здесь по контуру свода ищется такое распределение нормальных напряжений σ_n, при котором величина P достигает экстремума. На завершающем этапе решается задача поиска максимума функции одной переменной – $P(h)$.

Третий путь решения этой задачи, далее «**Эйлер – 3**», состоит в отказе от обеих гипотез – и от (2.8), и от (2.9). Тем самым ставится задача поиска экстремума функционала $P[y(x), \sigma_n(x)]$ с двумя неизвестными функциями: очертания $y(x)$ свода обрушения и распределения нормальных напряжений $\sigma_n(x)$ по контуру свода.

2.3. Решение «Эйлер – 1»

Запишем основное уравнение (2.7) с гипотезой (2.9) о распределении нормальных напряжений по контуру свода обрушения [65]:

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma y - R_t \cos\alpha - y' C_0 (1-\cos\alpha)^m dx. \qquad (2.10)$$

Принимая во внимание, что

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}, \qquad (2.11)$$

а также учитывая (2.4), выражение (2.10) представим в виде:

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma y - R_t \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - y' C_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^m dx. \qquad (2.12)$$

Поставим задачу найти максимум функционала (2.12). Подынтегральное выражение функционала имеет вид:

$$F(y,y') = \gamma y - R_t \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - y' C_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^m . \qquad (2.13)$$

Решение находится с помощью уравнения Эйлера, которое в случае, когда подынтегральное выражение F зависит от y и y' и не содержит явно x, имеет первый интеграл [144]:

$$F - y' F'_{y'} = C_1, \qquad (2.14)$$

где C_1 – постоянная интегрирования; $F'_{y'} \equiv \partial F / \partial y'$ – частная производная.

Уравнение (2.14) может быть проинтегрировано путем введения параметра, а выражение для x может быть найдено как функция этого же параметра:

$$dx = \frac{dy}{y'} \qquad \text{или} \qquad x = \int \frac{dy}{y'} + C_2 . \qquad (2.15)$$

Вначале обратимся к выражению (2.14) и возьмем производную $\partial F / \partial y'$ отдельно для каждого слагаемого, входящего в выражение (2.13).

Производная первого слагаемого по y' равна нулю.

Производная второго слагаемого по y' примет вид:

$$\frac{d}{dy'}\left(-R_t \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \frac{d}{dy'}\left[-R_t \left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2} R_t \left(1+y'^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y' = \frac{R_t y'}{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}} .$$

Производная третьего слагаемого по y' выражения (2.13) будет иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dy'}\left[-C_0 y'\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^m\right] = \frac{d}{dy'}\left\{-C_0 y'\left[1 - \left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^m\right\} =$$

$$= -C_0\left[1 - \left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^m - \frac{1}{2} \cdot 2C_0 y'^2 m \left[1 - \left(1+y'^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{m-1} \cdot \left(1+y'^2\right)^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= -C_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^m - C_0 y'^2 m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}} .$$

Тогда второе слагаемое в равенстве (2.14) примет вид:

$$y'F'_{y'} = \frac{R_t y'^2}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} - C_0 y' \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^m - C_0 y'^3 m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)^3}},$$

Полученное выражение и выражение (2.13) подставим в уравнение Эйлера (2.14):

$$\gamma y - R_t \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - C_0 y' \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^m - R_t y'^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} +$$

$$+ C_0 y' \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^m + C_0 y'^3 m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = C_1.$$

Выполнив элементарные преобразования, получим:

$$\gamma y - R_t \frac{1+2y'^2}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} + C_0 m \frac{y'^3}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^{m-1} = C_1. \qquad (2.16)$$

Для дальнейшего решения воспользуемся подстановкой

$$y' = \operatorname{tg}\alpha,$$

применив которую в (2.16), имеем:

$$\gamma y - R_t \frac{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^3}} + C_0 m \frac{\operatorname{tg}^3\alpha}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^3}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)^{m-1} = C_1,$$

или, с учетом (2.11),

$$\gamma y - R_t \frac{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)^3}} + C_0 m \frac{\operatorname{tg}^3\alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)^3}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}}\right)^{m-1} = C_1.$$

Выразим отсюда функцию $y(\alpha)$:

$$y(\alpha) = \frac{C_1}{\gamma} + \frac{R_t}{\gamma}\cos^3\alpha(1+2\operatorname{tg}^2\alpha) - \frac{C_0 m}{\gamma}\sin^3\alpha(1-\cos\alpha)^{m-1}. \qquad (2.17)$$

Поиском постоянной интегрирования C_1 займемся ниже, а сейчас перейдем к поиску x как функции того же параметра α. Для этого обратимся к равенству (2.15). Представим дифференциал функции y как

$$dy = \frac{dy}{d\alpha} d\alpha .$$

Найдем производную выражения (2.17) по $d\alpha$:

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{C_1}{\gamma} + \frac{R_t}{\gamma}\cos^3\alpha(1+2\mathrm{tg}^2\alpha) - \frac{C_0 m}{\gamma}\sin^3\alpha(1-\cos\alpha)^{m-1}\right]' =$$

$$= -\frac{R_t}{\gamma}\cdot 3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha\cdot(1+2\mathrm{tg}^2\alpha) + \frac{R_t}{\gamma}\cos^3\alpha\cdot 4\mathrm{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} -$$

$$-3\frac{C_0 m}{\gamma}\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(1-\cos\alpha)^{m-1} - \frac{C_0 m}{\gamma}\cdot\sin^4\alpha(m-1)(1-\cos\alpha)^{m-2}.$$

Чтобы теперь перейти к уравнению (2.15), разделим полученное выражение на y' и учтем, что $y' = \mathrm{tg}\,\alpha$:

$$dx = \frac{\frac{dy}{d\alpha}d\alpha}{y'} = \left\{-3\frac{R_t}{\gamma}\cos^3\alpha\cdot(1+2\mathrm{tg}^2\alpha) + 4\frac{R_t}{\gamma}\cdot\cos\alpha -\right.$$

$$\left. -3\frac{C_0 m}{\gamma}\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha(1-\cos\alpha)^{m-1} - \frac{C_0 m}{\gamma}\cdot(m-1)\cdot\sin^3\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(1-\cos\alpha)^{m-2}\right\}d\alpha,$$

Перепишем это выражение в более компактном виде:

$$dx = \frac{\frac{dy}{d\alpha}d\alpha}{y'} = \left\{\frac{R_t}{\gamma}\cos\alpha(1-3\sin^2\alpha) -\right.$$

$$\left. -\frac{C_0 m}{\gamma}\sin^3\alpha(1-\cos\alpha)^{m-2}\left[3\mathrm{ctg}^2\alpha(1-\cos\alpha) + \cos\alpha(m-1)\right]\right\}d\alpha .$$

Интеграл этого выражения после некоторых преобразований может быть представлен в виде:

$$x(\alpha) = C_2 + \frac{R_t}{\gamma}\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \frac{C_0(1-\cos\alpha)^m}{\gamma}\left[m\cdot\cos\alpha(\cos\alpha+1)+1\right], \quad (2.18)$$

где C_2 – вторая произвольная постоянная.

Далее определим произвольные постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий, которые в данной задаче имеют вид (см. рисунок 2.1):

$$\begin{cases} y = 0 & \text{при} \quad x = 0; \\ y' = 0 & \text{при} \quad x = a. \end{cases} \tag{2.19}$$

Второе граничное условие следует из предположения о том, что функция $y(x)$, описывающая контур свода является гладкой и симметричной относительно вертикальной линии $x = a$. Очевидно, что равенство $y' = 0$ означает $\alpha = 0$ (условие горизонтальности касательной к контуру свода в его верхней точке).

Постоянную C_2 найдем из второго граничного условия:

$$a = C_2 + \frac{R_t}{\gamma}\sin 0° \cdot \cos^2 0° - \frac{C_0(1-\cos 0°)^m}{\gamma} \cdot [m \cdot \cos 0° \cdot (\cos 0° + 1) + 1],$$

откуда

$$C_2 = a.$$

Постоянная C_1 будет найдена из равенства (2.17) с помощью первого граничного условия: $y = 0$ при $x = 0$. Однако, поскольку выражение (2.17) дает зависимость не $y(x)$, а $y(\alpha)$, то сперва следует определить значение параметра α в точке $x = 0$. С этой целью в (2.18) положим $x = 0$:

$$0 = C_2 + \frac{R_t}{\gamma}\sin\alpha_0 \cdot \cos^2\alpha_0 - \frac{C_0(1-\cos\alpha_0)^m}{\gamma}[m \cdot \cos\alpha_0(\cos\alpha_0 + 1) + 1],$$

после чего решим данное трансцендентное уравнение относительно α_0 (здесь через α_0 обозначено значение угла α в точке $x = 0$, см. рисунок 2.1).

Зная теперь значение α_0, подставим в уравнение (2.17) $\alpha = \alpha_0$ и, приравняв (2.17) нулю, найдем C_1:

$$C_1 = -R_t \cos^3\alpha_0(1 + 2\mathrm{tg}^2\alpha_0) + C_0 m \sin^3\alpha_0(1-\cos\alpha_0)^{m-1}.$$

Таким образом, найдено решение для очертания свода обрушения, наиболее невыгодного в отношении силы P, при сохранении гипотезы (2.9). Это очертание получено в параметрическом виде (2.17) и (2.18) [65].

Наконец, с помощью зависимости (2.10) определим равнодействующую P вертикальной нагрузки от горного давления на подземные сооружения [65].

Приняв обозначения:

$$y'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}y(\alpha),\qquad x'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}x(\alpha),\qquad f(\alpha)=\frac{y'(\alpha)}{x'(\alpha)},$$

выражение для P можно записать в виде:

$$\frac{1}{2}P=\int_{\alpha_0}^{0}\left[\gamma y(\alpha)-R_t\frac{1}{\sqrt{1+f(\alpha)^2}}-C_0 f(\alpha)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+f(\alpha)^2}}\right)^m\right]x'(\alpha)d\alpha,$$

или, чуть иначе,

$$P=2\int_{\alpha_0}^{0}\gamma y(\alpha)x'(\alpha)-\frac{R_t x'(\alpha)}{\sqrt{1+f(\alpha)^2}}-C_0 y'(\alpha)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+f(\alpha)^2}}\right)^m d\alpha. \qquad (2.20)$$

2.4. Решение «Эйлер – 2»

В этом варианте решения основное уравнение (2.7) дополняется гипотезой (2.8).

Возьмем производную функции (2.8) по dx:

$$y'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{h}{a^2}(2ax-x^2)\right]=\frac{2h}{a^2}(a-x),$$

после чего подставим $y(x)$ и $y'(x)$ в уравнение (2.7):

$$\frac{1}{2}P=\int_{0}^{a}\frac{\gamma hx}{a^2}(2a-x)-\sigma_n-\frac{2h}{a^2}(a-x)C_0\left(1-\frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m dx. \qquad (2.21)$$

Подынтегральное выражение зависит от функции $\sigma_n(x)$ и аргумента x:

$$F(\sigma_n,x)=\frac{\gamma hx}{a^2}(2a-x)-\sigma_n-\frac{2h}{a^2}(a-x)C_0\left(1-\frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m. \qquad (2.22)$$

В этом случае поиск экстремума функционала P выполняется с помощью уравнения Эйлера [144]:

$$F'_{\sigma_n}-\frac{d}{dx}F'_{\sigma'_n}=0. \qquad (2.23)$$

Здесь введены следующие обозначения для частных производных:

$$F'_{\sigma_n} \equiv \frac{\partial F}{\partial \sigma_n}, \qquad F'_{\sigma'_n} \equiv \frac{\partial F}{\partial \sigma'_n}.$$

Второе слагаемое выражения (2.23) равно нулю, поскольку F не зависит от σ'_n. Следовательно, уравнение (2.23) сильно упрощается:

$$F'_{\sigma_n} = 0. \tag{2.24}$$

Берем частную производную F по σ_n и согласно (2.24) приравниваем нулю:

$$F'_{\sigma_n} = -1 + \frac{2h(a-x)C_0 m}{a^2 R_t}\left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^{m-1} = 0.$$

Отсюда

$$\sigma_n = R_t\left\{1 - \left[\frac{a^2 R_t}{2h(a-x)C_0 m}\right]^{\frac{1}{m-1}}\right\}. \tag{2.25}$$

Это искомое выражение для функции $\sigma_n(x)$, при которой функционал P достигает экстремума в данном варианте решения задачи. Подставляя (2.25) в равенство (2.21), получим выражение для силы P предельного давления грунта на подземное сооружение при заданной высоте h параболического свода обрушения:

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \left\{\frac{\gamma h x}{a^2}(2a-x) - R_t + R_t\left[\frac{a^2 R_t}{2h(a-x)C_0 m}\right]^{\frac{1}{m-1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2h}{a^2}(a-x)C_0\left[\frac{a^2 R_t}{2h(a-x)C_0 m}\right]^{\frac{m}{m-1}}\right\} dx.$$

Упростим выражение для P:

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \left\{\frac{\gamma h x}{a^2}(2a-x) - R_t + R_t\frac{m-1}{m}\left[\frac{a^2 R_t}{2h(a-x)C_0 m}\right]^{\frac{1}{m-1}}\right\} dx.$$

Завершающим этапом решения задачи в этом варианте решения станет максимум полученного выражения $P(h)$:

$$P = \max_h 2 \cdot \int_0^a \left\{ \frac{\gamma h x}{a^2}(2a - x) - R_t + R_t \frac{m-1}{m} \left[\frac{a^2 R_t}{2h(a-x)C_0 m} \right]^{\frac{1}{m-1}} \right\} dx . \quad (2.26)$$

2.5. Решение «Эйлер – 3»

В третьем варианте решения ставится задача поиска экстремума функционала (2.7), зависящего от двух неизвестных функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$. Эта цель достигается решением системы уравнений Эйлера [49, 144]:

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 ; \qquad F'_{\sigma_n} - \frac{d}{dx} F'_{\sigma'_n} = 0 , \quad (2.27)$$

Здесь содержание обозначений для частных производных принято по аналогии с предыдущими решениями, а функция F представляет собой подынтегральное выражение функционала (2.7):

$$F(y, y', \sigma_n, \sigma'_n, x) = \gamma y - \sigma_n - y' C_0 \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t} \right)^m .$$

Запишем производные сначала из первого из равенств (2.27):

$$F'_y = \gamma ; \qquad F'_{y'} = -C_0 \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t} \right)^m ; \qquad \frac{d}{dx} F'_{y'} = C_0 \frac{m}{R_t} \sigma'_n \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t} \right)^{m-1} ,$$

а затем – из второго:

$$F'_{\sigma_n} = -1 + y' C_0 \frac{m}{R_t} \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t} \right)^{m-1} ; \qquad F'_{\sigma'_n} = 0 ; \qquad \frac{d}{dx} F'_{\sigma'_n} = 0 .$$

Подставив эти выражения в систему уравнений Эйлера (2.27), имеем:

$$\gamma - \frac{C_0 m \sigma'_n}{R_t} \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t} \right)^{m-1} = 0 ; \qquad -1 + \frac{y' C_0 m}{R_t} \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t} \right)^{m-1} = 0 . \quad (2.28)$$

Первое уравнение системы (2.28) может быть решено сразу же, после чего полученное таким образом решение относительно $\sigma_n(x)$ можно использовать при решении второго уравнения из системы (2.28).

Итак, первое равенств (2.28) запишем в виде:

$$\sigma_n' \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^{m-1} = \frac{\gamma R_t}{C_0 m}.$$

Данное уравнение решается методом разделения переменных:

$$\int \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^{m-1} d\sigma_n = \int \frac{\gamma R_t}{C_0 m} dx.$$

После интегрирования имеем:

$$-\frac{R_t}{m}\left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^{m} + C_1 = \frac{\gamma R_t}{C_0 m} \cdot x. \qquad (2.29)$$

Постоянную интегрирования C_1 найдем из граничных условий при вершине свода $\sigma_n = R_t$ при $x = a$ (см. рисунок 2.1):

$$C_1 = \frac{\gamma R_t}{C_0 m} \cdot a.$$

Применив полученное выражение для C_1 в (2.29), получим функцию распределения нормальных напряжений по контуру свода:

$$\sigma_n = R_t \left\{1 - \left[\frac{\gamma}{C_0} \cdot (a - x)\right]^{\frac{1}{m}}\right\}. \qquad (2.30)$$

Далее из второго уравнения системы Эйлера (2.28) выразим производную функции контура свода обрушения:

$$y' = \frac{R_t}{C_0 m}\left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^{1-m}.$$

Подставим сюда выражение (2.30) для σ_n:

$$y' = \frac{R_t}{C_0 m}\left[\frac{\gamma}{C_0}(a - x)\right]^{\frac{1-m}{m}},$$

или, чуть иначе,

$$y' = \frac{R_t}{\gamma m}\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} (a - x)^{\frac{1-m}{m}}.$$

Разделяя переменные, получим:

$$y = \frac{R_t}{\gamma m}\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} \int (a-x)^{\frac{1-m}{m}}\, dx + C_2,$$

откуда

$$y = -\frac{R_t}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot (a-x)^{\frac{1}{m}} + C_2. \qquad (2.31)$$

Постоянную интегрирования C_2 найдем из граничных условий в точке O ($y = 0$, $x = 0$):

$$C_2 = \frac{R_t}{\gamma}\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

После чего, подставив постоянную интегрирования C_2 в выражение (2.31), получим функцию очертания контура свода обрушения:

$$y = \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left[a^{\frac{1}{m}} - (a-x)^{\frac{1}{m}}\right]. \qquad (2.32)$$

Осталось вывести выражение для силы P предельного давления, для чего подставим найденные функции $y(x)$ и $\sigma_n(x)$ в выражение (2.7).

Вначале запишем только подынтегральное выражение из правой части (2.7), подставим в него (2.30) и (2.32) и упростим:

$$\gamma y - \sigma_n - y' C_0 \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m =$$

$$= \gamma \frac{R_t}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\left[a^{\frac{1}{m}} - (a-x)^{\frac{1}{m}}\right] - R_t\left\{1 - \left[\frac{\gamma}{C_0}(a-x)\right]^{\frac{1}{m}}\right\} -$$

$$-\frac{R_t}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{m}(a-x)^{\frac{1}{m}-1} C_0 \left\{1 - \frac{1}{R_t} R_t \left\{1 - \left[\frac{\gamma}{C_0} \cdot (a-x)\right]^{\frac{1}{m}}\right\}\right\}^m =$$

$$= R_t\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\left[a^{\frac{1}{m}} - (a-x)^{\frac{1}{m}}\right] - R_t + R_t\left[\frac{\gamma}{C_0}(a-x)\right]^{\frac{1}{m}} - R_t\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{1}{m}(a-x)^{\frac{1}{m}} =$$

$$= R_t\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\left[a^{\frac{1}{m}} - (a-x)^{\frac{1}{m}}\right] - R_t + R_t\left[\frac{\gamma}{C_0}(a-x)\right]^{\frac{1}{m}}\frac{m-1}{m} =$$

$$= R_t\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\left[a^{\frac{1}{m}} - (a-x)^{\frac{1}{m}} + (a-x)^{\frac{1}{m}}\frac{m-1}{m}\right] - R_t =$$

$$= \frac{R_t}{m}\left\{\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\left[ma^{\frac{1}{m}} - (a-x)^{\frac{1}{m}}\right] - m\right\}.$$

Теперь от полученного выражения в соответствии с (2.7) возьмем интеграл:

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \frac{R_t}{m}\left\{\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\left[ma^{\frac{1}{m}} - (a-x)^{\frac{1}{m}}\right] - m\right\}dx =$$

$$= \frac{R_t}{m}\int_0^a\left\{m\left[\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right] - \left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}(a-x)^{\frac{1}{m}}\right\}dx =$$

$$= \frac{R_t}{m}\left\{m\left[\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right]x\Big|_0^a + \left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{m}{1+m}(a-x)^{\frac{1+m}{m}}\Big|_0^a\right\} =$$

$$= R_t a\left[\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 - \left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{1}{1+m}a^{\frac{1}{m}}\right] =$$

$$= R_t a\left[\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\left(1 - \frac{1}{1+m}\right) - 1\right].$$

Итак, формула для вертикальной силы P горного давления, действующего

на конструкции подземного сооружения при сводообразовании, имеет вид [49, 65]:

$$P = 2R_t a\left[\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{m}{1+m}-1\right]. \qquad (2.33)$$

Таким образом, совокупность формул (2.30), (2.32) и (2.33) есть строгое решение задачи о предельном равновесии свода обрушения, полученное вариационным методом.

2.6. Сводка формул по трем вариантам решения

Общие уравнения плоской задачи теории сводообразования. Математическая формулировка плоской задачи теории сводообразования состоит из двух уравнений – статического уравнения (2.5), выражающего требование о равновесии всех сил, действующих на свод обрушения, в проекциях на вертикальную ось, и физического уравнения (2.6), описывающего закон прочности скального грунта:

статическое уравнение –

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma y - \sigma_n - y'\tau_n dx. \qquad (2.5^*)$$

физическое уравнение –

$$\tau_n = C_0\left(1-\frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m. \qquad (2.6^*)$$

Подстановка (2.6) в (2.5) дает основное уравнение теории сводообразования в скальных грунтах (2.7):

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma y - \sigma_n - y' C_0\left(1-\frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m dx. \qquad (2.7^*)$$

Цель решения – поиск максимума силы P, которая является силой, необходимой для удержания свода обрушения в равновесии, а, следовательно, является результирующей силой вертикального давления грунта на конструкции подземного сооружения [49, 65, 116].

Решение «Эйлер – 1». В этом решении принимается дополнительная гипотеза (2.9) из решения Я.О. Стахнёва [116] о распределении нормальных напряжений σ_n по контуру свода:

$$\sigma_n(x) = R_t \cos\alpha . \qquad (2.9^*)$$

При этом функция $y(x)$, описывающая очертание свода обрушения, является неизвестной функцией [49, 65].

С гипотезой (2.9) основное уравнение (2.7) принимает вид (2.12):

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma y - R_t \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - y' C_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^m dx . \qquad (2.12^*)$$

Ставится задача найти такое очертание свода обрушения в системе координат xOy, которому бы отвечал max P.

В результате решения очертание свода дается в параметрическом виде:

$$y(\alpha) = \frac{C_1}{\gamma} + \frac{R_t}{\gamma}\cos^3\alpha(1+2\mathrm{tg}^2\alpha) - \frac{C_0 m}{\gamma}\sin^3\alpha(1-\cos\alpha)^{m-1}, \qquad (2.17^*)$$

$$x(\alpha) = C_2 + \frac{R_t}{\gamma}\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha - \frac{C_0(1-\cos\alpha)^m}{\gamma}\left[m\cdot\cos\alpha(\cos\alpha+1)+1\right]. \qquad (2.18^*)$$

Здесь α – параметр, геометрический смысл которого – угол между касательной к контуру своду обрушения и осью Ox (см. рисунок 2.1); C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, равные

$$C_2 = a; \qquad C_1 = -R_t\cos^3\alpha_0(1+2\mathrm{tg}^2\alpha_0) + C_0 m\sin^3\alpha_0(1-\cos\alpha_0)^{m-1},$$

где α_0 – угол наклона касательной к оси Ox в точке O (см. рисунок 2.1), который находится из решения трансцендентного уравнения (2.18) при $x = 0$:

$$0 = a + \frac{R_t}{\gamma}\sin\alpha_0\cdot\cos^2\alpha_0 - \frac{C_0(1-\cos\alpha_0)^m}{\gamma}[m\cdot\cos\alpha_0(\cos\alpha_0+1)+1].$$

Наконец, вертикальная составляющая силы горного давления на конструкции подземного сооружения определится интегралом (2.20):

$$P = 2\int_{\alpha_0}^{0} \gamma y(\alpha)x'(\alpha) - \frac{R_t x'(\alpha)}{\sqrt{1+f(\alpha)^2}} - C_0 y'(\alpha)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+f(\alpha)^2}}\right)^m d\alpha . \qquad (2.20^*)$$

Здесь введены обозначения:

$$y'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}y(\alpha),\qquad x'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}x(\alpha),\qquad f(\alpha)=\frac{y'(\alpha)}{x'(\alpha)}.$$

Решение «Эйлер – 2». В этом решении принимается другая дополнительная гипотеза – это гипотеза (2.8) об очертании контура свода обрушения по квадратной параболе:

$$y(x)=\frac{hx}{a^2}(2a-x), \tag{2.8*}$$

но при этом значение h заранее неизвестно.

Распределение нормальных напряжений σ_n по контуру свода является искомой функцией.

С гипотезой (2.8) из решения Я.О. Стахнёва [116] основное уравнения принимает вид (2.21) [49, 65]:

$$\frac{1}{2}P=\int_0^a\frac{\gamma hx}{a^2}(2a-x)-\sigma_n-\frac{2h}{a^2}(a-x)C_0\left(1-\frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m dx. \tag{2.21*}$$

Ставится задача найти такую функцию $\sigma_n(x)$ распределения нормальных напряжений, которой бы отвечал max P. Эта функция имеет вид (2.25):

$$\sigma_n=R_t\left\{1-\left[\frac{a^2R_t}{2h(a-x)C_0m}\right]^{\frac{1}{m-1}}\right\}, \tag{2.25*}$$

Подстановка (2.25) в (2.21) даст выражение для силы P:

$$P=\max_h 2\cdot\int_0^a\left\{\frac{\gamma hx}{a^2}(2a-x)-R_t+R_t\frac{m-1}{m}\left[\frac{a^2R_t}{2h(a-x)C_0m}\right]^{\frac{1}{m-1}}\right\}dx. \tag{2.26*}$$

На завершающем этапе решения «Эйлер – 2» требуется осуществить поиск максимума силы P уже как функции единственной переменой h.

Решение «Эйлер – 3». В этом решении ставится задача поиска экстремума функционала $P[y(x),\sigma_n(x)]$, определяемого основным уравнением теории сводообразования (2.7) без привлечения дополнительных гипотез.

В результате решении найдены искомые функции для нормальных напряжений $\sigma_n(x)$ и очертания контура свода $y(x)$ [49, 65]:

$$\sigma_n = R_t \left\{ 1 - \left[\frac{\gamma}{C_0} \cdot (a - x) \right]^{\frac{1}{m}} \right\}; \qquad (2.30^*)$$

$$y = \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma}{C_0} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left[a^{\frac{1}{m}} - (a - x)^{\frac{1}{m}} \right]. \qquad (2.32^*)$$

Подстановка этих выражений в (2.7) позволяет получить формулу для вертикальной составляющей силы, действующей на конструкции подземных сооружений от горного давления, в замкнутом виде:

$$P = 2R_t a \left[\left(\frac{\gamma a}{C_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{1+m} - 1 \right]. \qquad (2.33^*)$$

2.7. Анализ поведения функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$

Анализ результатов полученных решений будем осуществлять в относительных переменных: γ – единица объемного (удельного) веса, a – единица длины. Соответственно, γa – единица напряжений.

Относительные значения расстояний, напряжений и сил вычисляются по формулам соответственно:

$$\bar{b} = \frac{b}{a}, \qquad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\gamma a}, \qquad \bar{P} = \frac{P}{\gamma a^3}, \qquad (2.34)$$

где b – фактический геометрический линейный размер; σ – фактическое напряжение; P – фактическое значение силы.

Обратный пересчет осуществляется по формулам:

$$b = a \cdot \bar{b}, \qquad \sigma = \gamma a \cdot \bar{\sigma}, \qquad P = \gamma a^3 \cdot \bar{P}. \qquad (2.35)$$

Ниже по тексту для обозначения относительных переменных каких-либо

специальных обозначений вводить не будем (за редким исключением), поскольку будет понятно из контекста, идет ли речь об относительных величинах или же об их фактических значениях.

В этой главе будут приняты следующие параметры прочности скального грунта в соответствии с условием прочности (2.6):

$$R_t = -0{,}1 \cdot R_c, \qquad C_0 = -0{,}25 \cdot R_c, \qquad m = 0{,}44, \qquad (2.36)$$

где, напомним, R_c – прочность скального грунта на одноосное сжатие, в соответствии с принятым правилом знаков принимаемое отрицательным: $R_c < 0$.

Параметры (2.36) в целом являются приемлемыми с точки зрения их соответствия прочности реальных грунтов – так можно сказать на основе анализа данных, имеющихся в открытых источниках, например [116]. При этом, конечно же, и принятая величина $m = 0{,}44$, и принятые соотношения между C_0, R_t и R_c ни в коем случае не охватывают весь диапазон возможных значений прочностных характеристик скальных грунтов, но лишь являются одними из возможных.

Кроме того, параметры (2.36) довольно часто использовались в диссертации Я.О. Стахнёва [116]. Поскольку ниже будет приводиться, и не единожды, сопоставление с его результатами, то принятие равенств (2.36) в качестве исходных данных является целесообразным еще и по этой причине.

Наконец, исходные данные в виде равенств (2.36) позволяют осуществлять анализ поведения скальных грунтов в самом широком диапазоне их прочности, меняя лишь один параметр – прочность на одноосное сжатие R_c.

В случае, если для тех или иных примеров расчета будут приняты иные соотношения между параметрами C_0, R_t и R_c и иное значение m, то это, разумеется, будет оговариваться.

Результаты решения «Эйлер – 1». На рисунке 2.4, *а*, показаны очертания сводов обрушения, которым отвечают экстремальные значения предельной силы P при $R_c = 4, 5, 6, 7$. Эти очертания рассчитаны по формулам (2.17) и (2.18). На рисунке 2.4, *б*, показаны графики функции $\sigma_n(x)$, которая в этом решении является изначально принятой гипотезой (2.9).

Графики $\sigma_n(x)$ даны для тех же исходных данных, что и искомые функции

$y(x)$ на рисунке 2.4, *а*. Обращает на себя внимание, что построенные кривые $y(x)$ более-менее близки к параболическому очертанию, которое большинством специалистов считается, в целом, соответствующим реальной картине разрушения грунта над выработкой. При этом четко прослеживается закономерность – чем выше прочность, тем более пологий свод обрушения, и наоборот. Эта закономерность, как известно, положена в основу шкалы М.М. Протодьяконова, и представленные графики наряду с решениями Я.О. Стахнёва [116] являются теоретическим подтверждением этого факта.

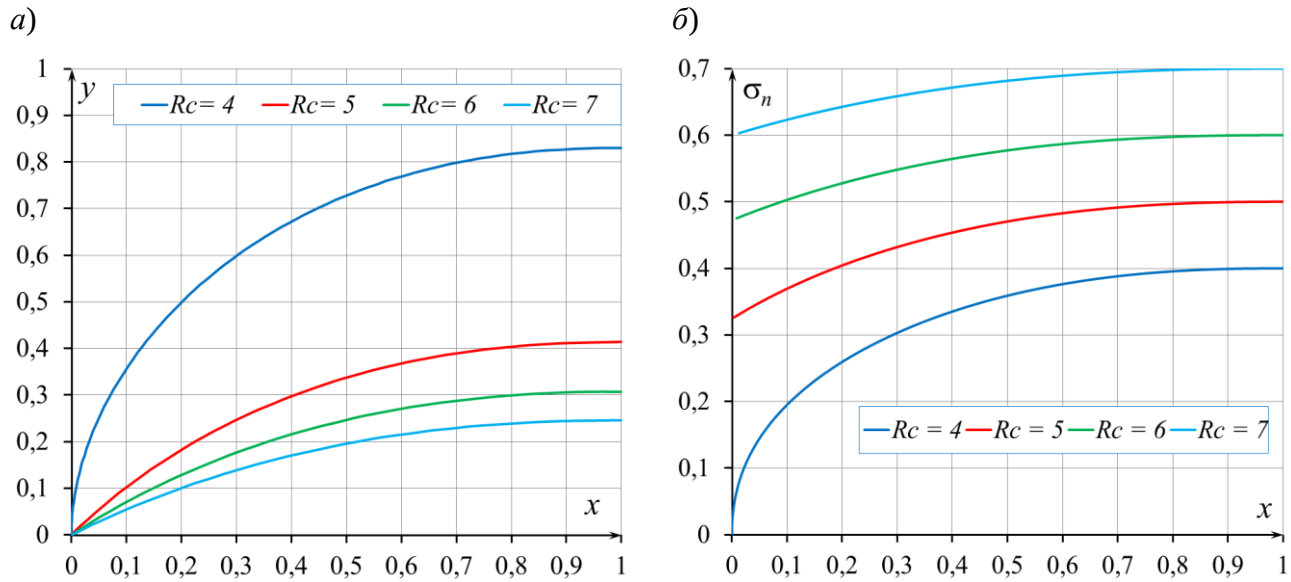


Рисунок 2.4 – Некоторые результаты решений «Эйлер – 1» [49, 65]:
а – очертания сводов обрушения (искомая функция);
б – распределение напряжений σ_n, действующих по контуру свода (принятая гипотеза)

Очень важной особенностью данного решения является ограниченность области определения решения. В частности, если прочностные параметры скального грунта заданы равенствами (2.36), то решение будет существовать только при $R_c \geq 4$.

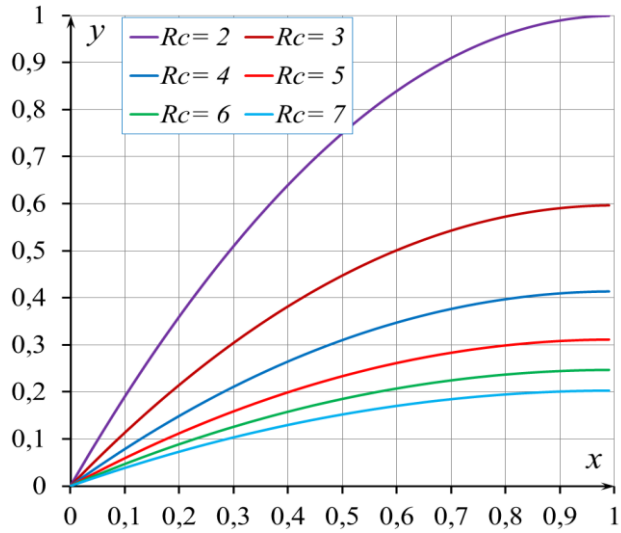
Такая ограниченность области определения объясняется тем, что при $R_c < 4$ гипотеза (2.9), образно говоря, перестает работать. В самом деле, данная гипотеза предполагает растяжение по всему контуру свода обрушения независимо от высоты свода. В то же время при уменьшении значений R_c свод обрушения становится все более подъемистым, а для достаточно подъемистых сводов следует ожидать

появление распора в нижней части свода.

Исследования Я.О. Стахнёва, напомним, также показали, что при малых R_c решения не существует [116]. При этом Я.О. Стахнёвым утверждалось, что невозможность построить решение в этом случае означает принципиальную смену самой схемы потери устойчивости грунтового массива над выработкой, а именно – речь идет о ситуации, когда вместо свода обрушения над выработкой образуется столб обрушения. К анализу этого предположения Я.О. Стахнёва мы еще вернемся. Пока же в порядке сравнения: для исходных данных (2.36) в решениях Я.О. Стахнёва схема свода обрушения переставала работать примерно при $R_c < 2{,}7$.

Результаты решения «Эйлер – 2». На рисунке 2.5, *а*, показаны очертания $y(x)$ сводов обрушения, которые здесь принимались по гипотезе (2.8), а высота h свода обрушения находилась из поиска максимума (2.26). На рисунке 2.5, *б*, даны эпюры нормальных напряжений $\sigma_n(x)$ по контуру свода, рассчитанные по формуле (2.25) при различных значениях R_c. В решении «Эйлер – 2», напомним, $\sigma_n(x)$ – это искомые функции. Как видно из графиков $\sigma_n(x)$, при больших значениях R_c (в данном случае – это $R_c = 4, 5, 6, 7$) по границе свода обрушения действуют только растягивающие напряжения.

а)



б)

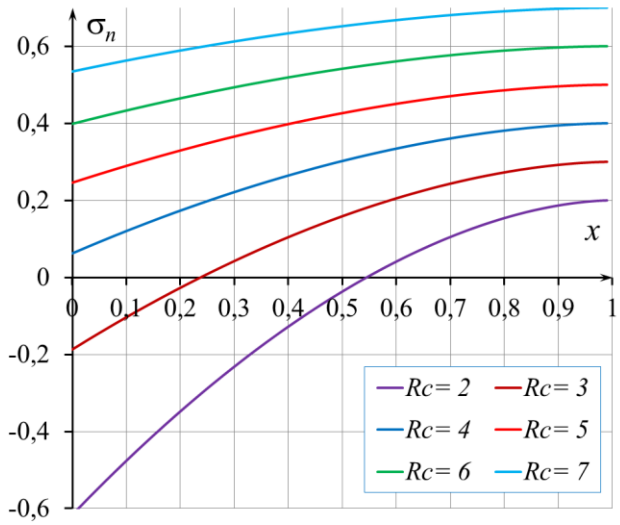


Рисунок 2.5 – Некоторые результаты решений «Эйлер – 2» [49, 65]:
а – очертания сводов обрушения (принятая гипотеза);
б – распределение напряжений σ_n, действующих по контуру свода (искомая функция)

С уменьшением прочности грунта (в данном случае – это $R_c = 3$ и $R_c = 2$) в нижней части свода появляются сжимающие напряжения. Сказанное можно проследить по кривым «$R_c = 3$» при $x < 0{,}25$ и «$R_c = 2$» при $x < 0{,}55$.

Важно заметить, что с уменьшением прочности меняется и очертание свода обрушения – он становится все более подъемистым (см. рисунок 2.5, *а*).

Таким образом, в решении «Эйлер – 2» удалось смоделировать явление распора, который появляется с увеличением высоты свода обрушения.

Еще одним принципиально важным моментом является то, что решение удается получить при любом значении R_c. В этом состоит главное отличие результатов решения «Эйлер – 2» и от решения «Эйлер – 1», и от результатов, полученных Я.О. Стахнёвым. Примем параметры прочности по (2.36) и рассчитаем несколько примеров того, как при малых значениях R_c изменяются высота h свода обрушения, задаваемого уравнением квадратной параболы (2.8), и сила P предельного давления в соответствии с (2.26):

– при $R_c = 3$ имеем $h = 0{,}596$ и $P = -0{,}250$;

– при $R_c = 1$ имеем $h = 2{,}41$ и $P = 1{,}22$;

– при $R_c = 0{,}1$ имеем $h = 45{,}2$ и $P = 26{,}5$;

– при $R_c = 0{,}01$ имеем $h = 848$ и $P = 497$;

– при $R_c = 0{,}001$ имеем $h = 15888$ и $P = 9321$.

Напомним, что согласно «Эйлер – 1» решения не существует при $R_c < 4$, а по Я.О. Стахнёву решения не существует при $R_c < 2{,}7$.

Результаты решения «Эйлер – 3». На рисунке 2.6, *а*, показаны очертания сводов обрушения, а на рисунке 2.6, *б*, приводятся графики функций $\sigma_n(x)$ для R_c = 2, 3, 4, 5, 6, 7. Такие исходные данные приняты для большей наглядности сравнения с результатами «Эйлер – 1» и «Эйлер – 2».

Сопоставив графики функций $y(x)$, показанные на рисунке 2.4, *а*, и на рисунке 2.6, *а*, можно констатировать, что с уменьшением R_c разность между решениями «Эйлер – 1» и «Эйлер – 3» увеличивается – в частности, это касается высоты h свода обрушения. Если при $R_c = 7$ значения высоты h отличаются на 15%, то

при $R_c = 4$ отличие составляет уже более 100%.

Важнейшим отличием решений «Эйлер – 1» и «Эйлер – 3» является то, что решение «Эйлер – 3» (так же, как и «Эйлер – 2») существует при сколь угодно малых значениях R_c. Так, например, вычисления по формулам (2.32) и (2.33) дают следующие результаты:

– при $R_c = 3$ имеем $h = 0{,}577$ и $P = -0{,}247$;

– при $R_c = 1$ имеем $h = 2{,}34$ и $P = 1{,}23$;

– при $R_c = 0{,}1$ имеем $h = 43{,}8$ и $P = 26{,}7$;

– при $R_c = 0{,}01$ имеем $h = 820$ и $P = 501$;

– при $R_c = 0{,}001$ имеем $h = 15360$ и $P = 9389$.

Обращает на себя внимание близость результатов расчета величин h и P в зависимости от R_c по формулам решений «Эйлер – 2» и «Эйлер – 3». Кроме того, довольно близкие значения σ_n дают графики, показанные на рисунке 2.5, *б*, и на рисунке 2.6, *б*. Это связано с тем, что очертания сводов обрушения, рассчитанные по формуле (2.32), также довольно близки к параболическому очертанию, вычисляемому по формуле (2.8).

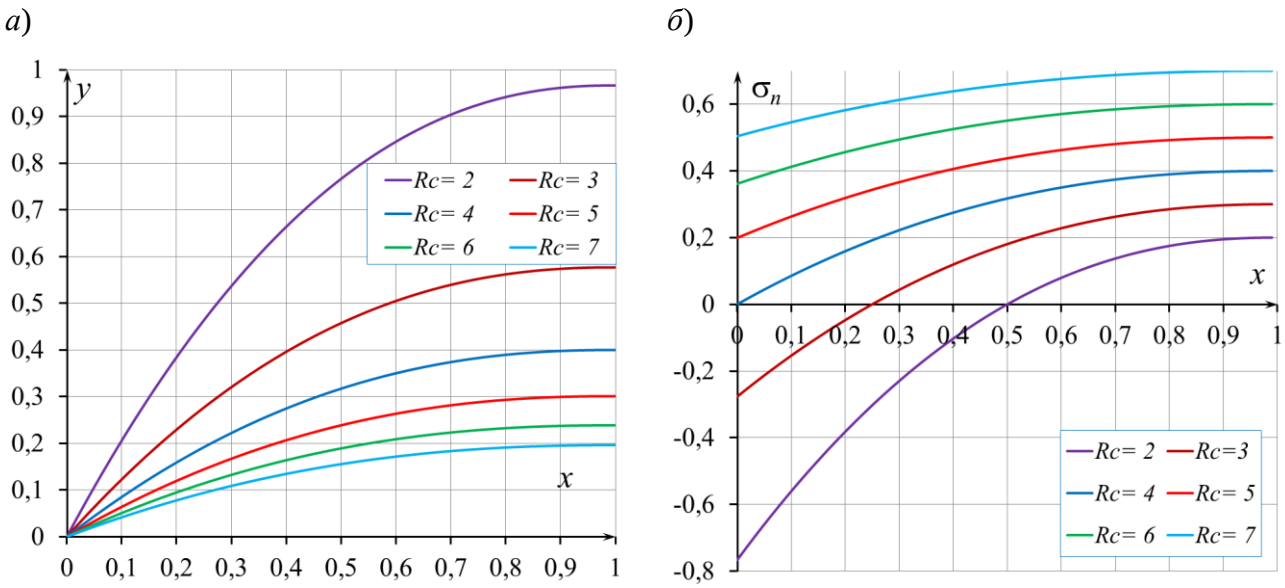


Рисунок 2.6 – Некоторые результаты «Эйлер – 3» [49, 65]:
а – очертания контуров сводов обрушения;
б – распределение напряжений σ_n, действующих по контуру свода

Решения «Эйлер – 3», как и «Эйлер – 1» и «Эйлер – 2», дают дополнитель-

ное теоретическое обоснование известной закономерности: с уменьшением прочности скального грунта R_c увеличивается высота h свода обрушения и возникает распор в нижней его части. Тем самым скальный грунт начинает работать не на отрыв, как в пологих сводах, а на трение по границе свода в нижней его части.

Указанная закономерность была положена М.М. Протодьяконовым в основу своей знаменитой шкалы. Подчеркнем, что ранее теоретическое обоснование этой закономерности было получено Я.О. Стахнёвым. Здесь же, повторимся, удалось последовательно отказаться от гипотез (2.8) и (2.9), к которым прибегнул в своих решениях Я.О. Стахнёв. Таким образом, полученные и описанные выше решения являются более строгими и общими.

2.8. Анализ поведения зависимостей $P(R_c)$ и $h(R_c)$

Сопоставление графиков $P(R_c)$ по трем вариантам решения. Наиболее важным результатом решения задачи о сводообразовании является величина равнодействующей силы P предельного давления, с которым свод обрушения будет действовать на конструкции подземного сооружения. По существу, сила P – это сила, создаваемая горным давлением грунта на крепь выработки.

С этой целью сопоставим оценки P, получаемые в рамках описанных выше решений:

- по формуле (2.20) из решения «Эйлер – 1»;
- по формуле (2.26) из решения «Эйлер – 2»;
- по формуле (2.33) из решения «Эйлер – 3».

Сопоставление результатов будет наглядным, если представить их в виде зависимостей силы P горного давления от прочности грунта на одноосное сжатие R_c. Такие же зависимости анализировал в своих исследованиях и Я.О. Стахнёв [116]. В качестве исходных данных, как и ранее, примем $\gamma = 1$, $a = 1$ и равенства (2.36).

На рисунке 2.7 представлены графики рассчитанных зависимостей $P(R_c)$. Здесь значения R_c даны по модулю.

Как видно из сопоставления, все три решения дают довольно близкие значения предельной силы P. Однако – и об этом уже было сказано выше по тексту – вариант «Эйлер – 1» не дает решения при $R_c < 4$. Дополнительно обратим внимание на то, что при $R_c = 4…6$ кривая «Эйлер – 1» начинает давать некоторое расхождение с двумя остальными решениями.

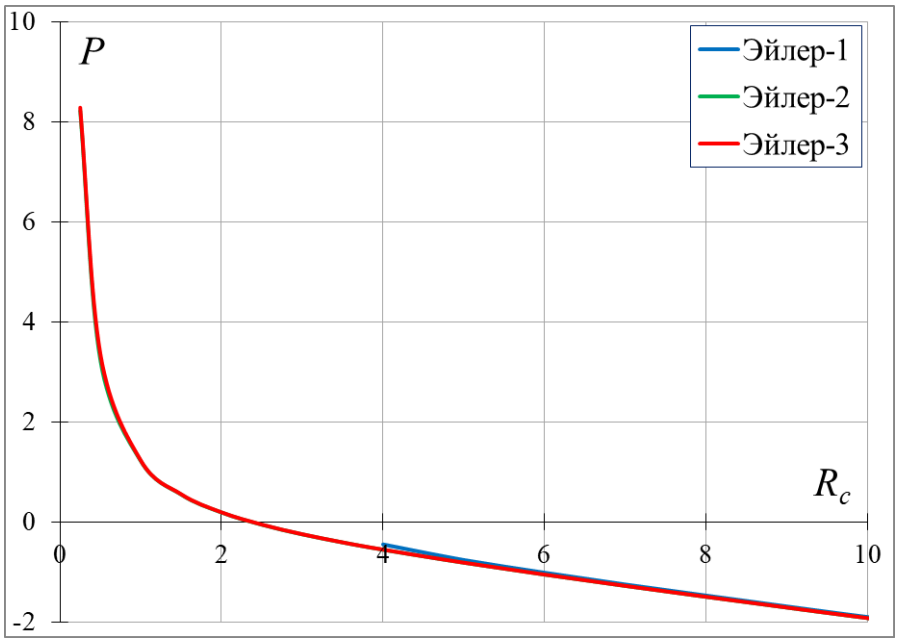


Рисунок 2.7 – Сопоставление зависимостей $P(R_c)$, построенных по трем решениям

Что касается результатов, полученных в решениях «Эйлер – 2» и «Эйлер – 3», то они очень близки между собой – кривой «Эйлер – 2» (зеленый цвет) даже не видно, так как ее почти полностью закрывает линия «Эйлер – 3» красного цвета. Сопоставление этих и некоторых других результатов в числах приводится в таблице А.1.

Тем самым дано теоретическое подтверждение того, что

– сила P горного давления, действующая на конструкции подземного сооружения при сводообразовании, падает с увеличением прочности R_c грунта [49];

– если увеличивать прочность грунта, то, начиная с какого-то значения R_c, сила P становится отрицательной [49].

Отрицательное значение силы P означает, что при данной прочности скального грунта подземная выработка в состоянии держать саму себя без крепления.

Более того – для реализации обрушения грунта потребуется определенное дополнительное усилие.

Этот, в принципе, очевидный факт довольно долго не имел теоретического обоснования в рамках теории сводообразования. Видимо, впервые такое обоснование было дано Я.О. Стахнёвым в его работе [116] – по крайней мере, он заострил на этом внимание. Здесь удалось получить еще одно теоретическое подтверждение этого факта, но уже освободив решение от дополнительных гипотез (2.8) и (2.9).

Сопоставление графиков $h(R_c)$ по трем вариантам решения. С точки зрения практики проектирования и расчетов подземных сооружений высота h свода обрушения является не менее важным результатом решения задачи, чем сила P предельного давления. Это связано с тем, что в практических методиках расчета, основанных на теории сводообразования, вертикальная нагрузка, собираемая на крепь подземных выработок, представляет собой давление от веса свода обрушения высотой h:

$$p = \gamma h\,. \qquad (1.1^*)$$

Таким образом, в практических методиках свод обрушения рассматривается как часть грунтового массива, которая, образно говоря, потенциально готова в любой момент потерять устойчивость и обрушиться на подземное сооружение. Силами сопротивления, действующими по контуру свода и удерживающими его от обрушения, пренебрегают.

Покажем, как прочность скального грунта влияет на высоту h свода обрушения. Рассмотрим графики зависимостей $h(R_c)$ по аналогии с тем, как это было сделано для функций $P(R_c)$.

На рисунке 2.8 даны зависимости $h(R_c)$, рассчитанные для параметров (2.36) условия прочности (2.6):

– по формуле (2.17) при $\alpha = 0$ из решения «Эйлер – 1»;

– по формуле (2.26) из решения «Эйлер – 2»;

– по формуле (2.32) при $x = a$ из решения «Эйлер – 3».

На этих графиках значения R_c даны по модулю.

В числах эти результаты приведены в таблице А.2.

На рисунке 2.8, *а*, даны указанные зависимости в диапазоне $R_c = 0…10$, а на рисунке 2.8, *б* – в диапазоне $R_c = 0…1$. В последнем случае на оси ординат используется логарифмическая шкала.

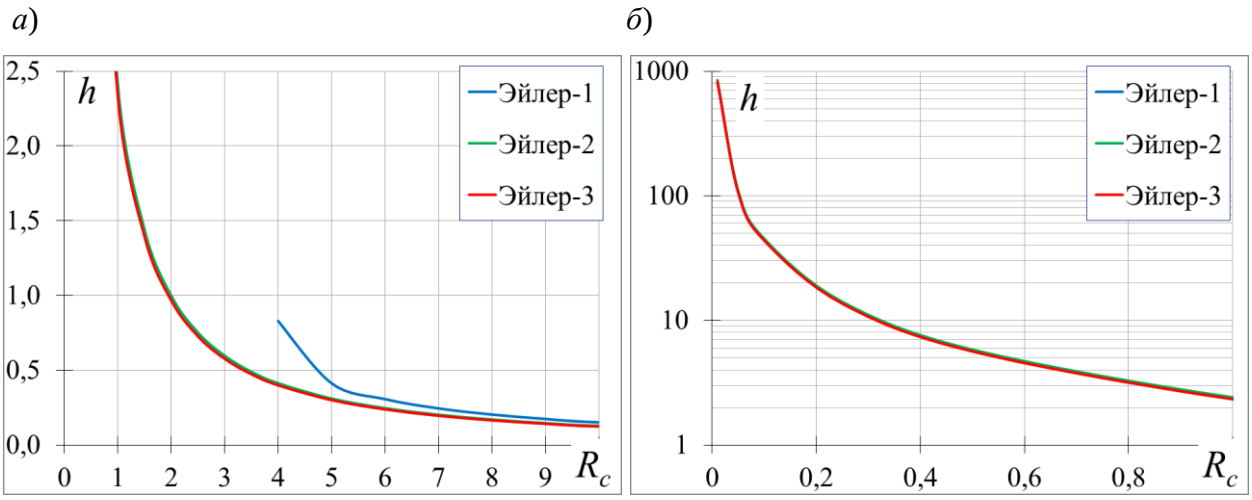


Рисунок 2.8 – Сопоставление зависимостей $h(R_c)$, построенных по трем решениям: *а* – в диапазоне $R_c = 0…10$; *б* – в диапазоне $R_c = 0…1$

В целом полученные закономерности вполне ожидаемы. Выделим одну особенность графика $h(R_c)$: при $R_c < 0{,}5$ высота свода начинает расти с очень высокой скоростью.

2.9. Влияние параметра *m* на поведение зависимостей $P(R_c)$, $y(x)$ и $\sigma_n(x)$

В условие прочности (2.6) входят три параметра:

C_0 – величина, являющаяся аналогом удельного сцепления в дисперсных грунтах;

R_t – прочность скального грунта на одноосное растяжение;

m – параметр, определяющий кривизну огибающей предельных кругов Мора.

Отметим, что сопротивление R_c одноосному сжатию в явном виде в (2.6) не входит. Однако, оно, конечно же, будет непосредственно влиять на величину параметра m (см. рисунок 2.2), и, кроме того, величине R_c можно поставить в соот-

ветствие параметры R_t и C_0, как это, например, сделано в (2.36). Вообще говоря, о корреляции между величинами R_t и R_c хорошо известно, и в литературе можно найти многочисленные опытные данные – см., например, [4]. Поэтому в первом приближении можно считать, что параметры R_c, R_t и C_0 увеличиваются или уменьшаются более-менее пропорционально.

С характеристикой m ситуация более сложная. Судя по всему, на сегодняшний день нет единого мнения относительно того, какая кривизна огибающей предельных кругов Мора характерна для тех или иных скальных грунтов. Наверное, можно было бы попытаться сориентироваться на условие прочности *Hoek-Brown* [154], но, даже учитывая его популярность и, как следствие, его широкую апробацию, это едва ли станет «гарантией правильности». Поэтому будем исходить из того, что параметр m может принимать различные значения – от почти нуля до единицы.

На рисунке 2.9 показаны огибающие предельных кругов Мора, построенные в относительных переменных ($\gamma = 1$, $a = 1$) для следующих исходных данных: $R_t = 0{,}1$ и $C_0 = 0{,}25$. Параметр m, предположим, изменяется от 0,1 до 1,0 шагом 0,1. Эти огибающие в дальнейшем для краткости договоримся называть кривыми прочности или графиками среза.

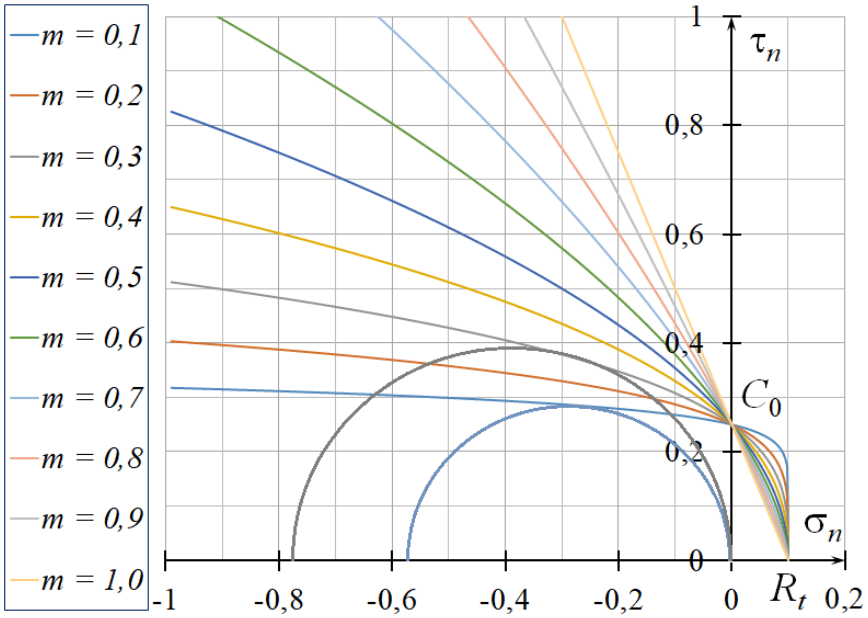


Рисунок 2.9 – Огибающие предельных кругов Мора при $R_t = 0{,}1$, $C_0 = 0{,}25$

Важно отметить, что для представленных кривых прочности характеристи-

ки R_t и C_0 одинаковые, а параметры m и R_c будут различны. Для примера на этой же диаграмме показаны два предельных круга Мора: один соответствует кривой $m = 0{,}1$, другой – кривой $m = 0{,}3$. В первом случае, как видно из рисунка, $R_c \approx 0{,}57$, во втором случае $R_c \approx 0{,}78$. В таблице 2.1 представлены значения R_c для всех принятых к расчету значений m. В нижеследующих расчетах параметры прочности R_t и C_0 будем менять пропорционально значениям 0,1 и 0,25, а величину R_c будем менять пропорционально значениям, указанным в таблице 2.1, в зависимости от m.

Таблица 2.1 – Значения R_c для различных значений параметра m

m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
R_c	0,57	0,66	0,775	0,927	1,12	1,36	1,65	1,92	2,2	2,55

Например, при $m = 0{,}4$ будут рассмотрены следующие исходные данные:

$R_c = 0{,}927 \cdot 1 = 0{,}927;$ $R_t = 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}1;$ $C_0 = 0{,}25 \cdot 1 = 0{,}25;$

$R_c = 0{,}927 \cdot 2 = 1{,}854;$ $R_t = 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2;$ $C_0 = 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5;$

$R_c = 0{,}927 \cdot 3 = 2{,}781;$ $R_t = 0{,}1 \cdot 3 = 0{,}3;$ $C_0 = 0{,}25 \cdot 3 = 0{,}75;$

$R_c = 0{,}927 \cdot 4 = 3{,}708;$ $R_t = 0{,}1 \cdot 4 = 0{,}4;$ $C_0 = 0{,}25 \cdot 4 = 1{,}0$

и так далее.

При $m = 0{,}7$ будут рассмотрены следующие исходные данные:

$R_c = 1{,}65 \cdot 1 = 1{,}65;$ $R_t = 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}1;$ $C_0 = 0{,}25 \cdot 1 = 0{,}25;$

$R_c = 1{,}65 \cdot 2 = 3{,}3;$ $R_t = 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2;$ $C_0 = 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}5;$

$R_c = 1{,}65 \cdot 3 = 4{,}95;$ $R_t = 0{,}1 \cdot 3 = 0{,}3;$ $C_0 = 0{,}25 \cdot 3 = 0{,}75;$

$R_c = 1{,}65 \cdot 4 = 6{,}6;$ $R_t = 0{,}1 \cdot 4 = 0{,}4;$ $C_0 = 0{,}25 \cdot 4 = 1{,}0$

и так далее.

Для дальнейших рассуждений будем использовать формулы решения «Эйлер – 3». Проанализируем, как влияет параметр m на величину P (рисунок 2.10). На этих графиках значения R_c даны по модулю.

Из приведенных графиков следует, что параметр m существенно корректирует поведение зависимостей $P(R_c)$ особенно при снижении R_c. В этой зоне ($R_c < 2$) при малых значениях m наблюдается резкий рост силы предельного давления на

конструкции подземных сооружений. В то же время при $m \to 1$ график $P(R_c)$ имеет достаточно спокойный характер. Объяснение этому можно найти, если рассмотреть влияние m на функции $y(x)$ и $\sigma_n(x)$. Соответствующие графики приведены в приложении Б. И здесь обращают на себя внимание несколько моментов.

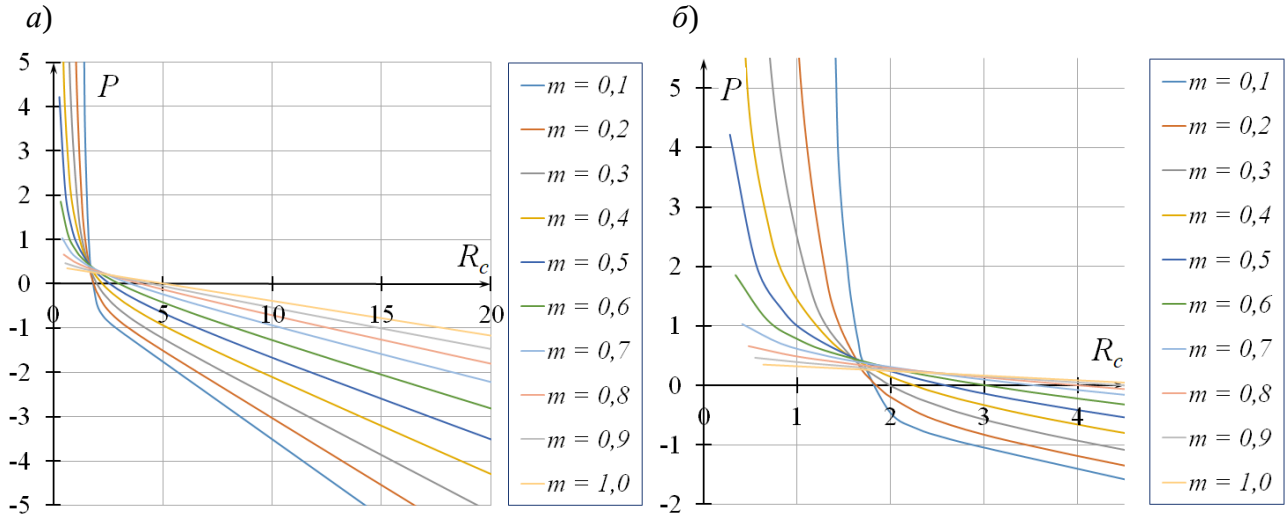


Рисунок 2.10 – Зависимости $P(R_c)$:
а – на интервале $R_c = 0…20$; *б* – на интервале $R_c = 0…5$

Во-первых, при малых m очертания сводов обрушения становятся трапецеидальными и даже практически прямоугольными с закругленными углами. В этот момент влияние прочности R_c на высоту свода обрушения огромно.

Во-вторых, при $m \to 1$ свод обрушения приобретает форму треугольника, причем высота свода становится одинаковой при любой величине R_c.

В-третьих, по мере продвижения величины m от 0,1 к единице свод обрушения меняет свою форму – с плавной пологой арки на стрельчатую. При этом очертание свода из криволинейного постепенно становится прямолинейным.

В-четвертых, в зависимости от m существенно меняют свою форму и эпюры $\sigma_n(x)$, также переходя от криволинейного очертания к линейному.

2.10. Некоторые особенности решения при $m = 1$

Вводные замечания. Прямолинейные (или близкие к прямолинейным) огибающие предельных кругов Мора характерны для дисперсных грунтов. В по-

лученных решениях им соответствуют стрельчатые арки – вплоть до треугольников при $m = 1$ (см. рисунок Б.5). Этот результат хорошо согласуется с известными опытными данными – эксперименты с дисперсными грунтами, где фиксировались стрельчатые арки, подробно описаны, например, в трудах сотрудников Института горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН [116, 143] (далее – ИГД СО РАН).

Обращает на себя внимание, что при вершине свода обрушения, показанного на рисунке Б.5 (напомним, что на приводимых схемах показаны только половины симметричного свода), образуется тупой угол, в то время как в опытах [143] угол при вершине обычно острый. Это объясняется следующим образом. Если в условии прочности (2.6) принять $m = 1$, а соотношение параметров прочности $C_0/R_t = 0{,}25/0{,}1$ (как это и сделано в предыдущих примерах расчетах), то это будет равнозначно углу внутреннего трения (см., например, рисунок 2.9):

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{C_0}{R_t} = \operatorname{arctg}\frac{0,25}{0,1} = 68,2^\circ,$$

а такие значения характеры не для углов внутреннего трения дисперсных грунтов, а для кажущихся углов внутреннего трения скальных грунтов.

Теперь обратим внимание на еще одну характерную деталь: половина угла при вершине свода (см. рисунок Б.5, справа) составляет

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{0,4} = 68,2^\circ,$$

то есть равна углу φ, соответственно, весь угол при вершине равен 2φ.

Поставим задачу вначале исследовать влияние угла φ внутреннего трения на очертание свода обрушения (иначе говоря, проверим, всегда ли угол при вершине свода равен 2φ), а затем исследуем влияние обеих прочностных характеристик дисперсных грунтов – удельного сцепления C_0 и угла внутреннего терния φ – и на величину предельной силы P горного давления.

Влияние φ на очертание свода обрушения. Влияние угла внутреннего трения на очертание свода обрушения будем определять при $C_0 = 0{,}1 = \text{const}$, а угол φ станем менять от 10° до 80°. На рисунке 2.11, *а*, показаны огибающие предельных кругов Мора (прямые Кулона), с помощью которых мы будем выполнять

поставленную задачу. Изображенные здесь прямые Кулона отвечают параметрам прочности грунта φ = 10°, 20°…80° и C_0 = 0,1. Как и ранее, приняты относительные переменные γ = 1 и a = 1. На рисунке 2.11, *б*, показаны очертания сводов обрушения (левые половины симметричных схем), рассчитанные по формуле (2.32).

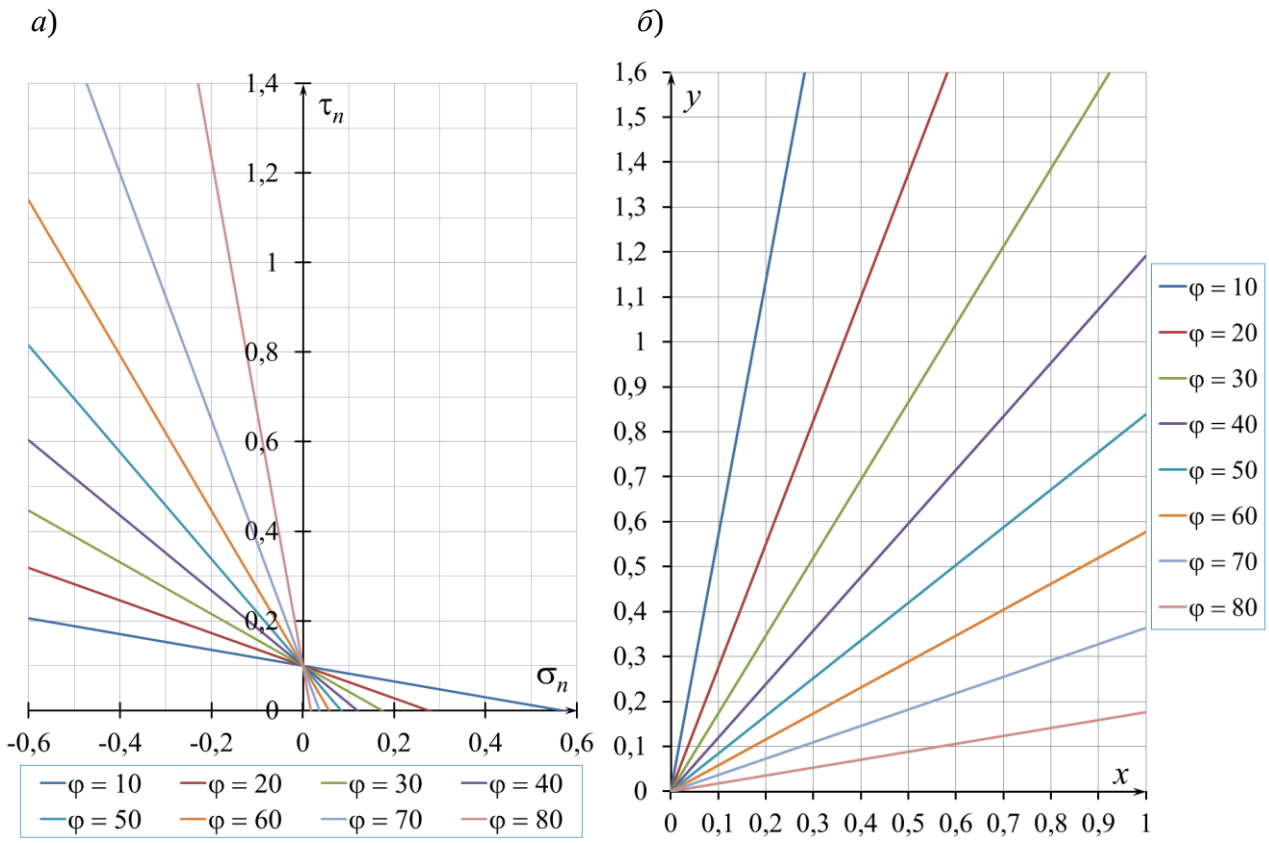


Рисунок 2.11 – Сводообразование в дисперсных грунтах с различным φ:
а – паспорта прочности; *б* – левые половины симметричных сводов обрушения

Согласно (2.32) при m = 1 высота свода обрушения

$$h = \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma a}{C_0} \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{R_t a}{C_0},$$

откуда

$$\frac{a}{h} = \frac{C_0}{R_t} = \operatorname{tg} \varphi . \qquad (2.37)$$

Но по определению коэффициента крепости

$$f = \frac{a}{h},$$

следовательно,

$$f = \operatorname{tg}\varphi. \qquad (2.38)$$

Утверждение о том, что коэффициент крепости равен тангенсу угла внутреннего трения, было сделано М.М. Протодьяконовым. Вывод этой формулы, предложенный М.М. Протодьтяконовым, приводится в главе 1. Здесь получена та же самая формула – формула (2.38), – но совершенно иным путем.

Вернемся к равенствам (2.37). Из этих равенств непосредственно следует, что для грунтов с $m = 1$ (огибающая предельных кругов Мора прямолинейна) угол при вершине свода обрушения равен 2φ. Данный результат качественно совпадает с известными результатами опытов ИГД СО РАН, но количественно имеет место расхождение. В частности, в упомянутых экспериментах показано, что угол при вершине равен или φ, или $2\mu = \pi/2 - \varphi$ (см., например, [14, рисунок 2.9]), в то время как полученные теоретические зависимости дают величину этого же угла 2φ.

Сравнивая теорию и опыт в данном случае, на наш взгляд, надо принять во внимание следующее. Во-первых, необходимо учесть известные сложности, связанные с точностью измерений таких величин, как направляющие углы поверхностей скольжения. Во-вторых, в теоретическом решении грунт воспринимает растягивающие усилия, в то время как в экспериментах ИГД СО РАН был принят сыпучий материал, который на растяжение не работает.

Эти причины, конечно, не позволяют полученное соответствие теоретических и экспериментальных данных оценить как очень хорошее, но, наверное, позволят считать такое соответствие более или менее удовлетворительным.

Итак,

– доказано, что при $m = 1$ угол при вершине свода обрушения равен удвоенному значению угла внутреннего трения φ;

– полученный результат, в целом, коррелирует с опытными данными, полученными в ИГД СО РАН [143], хотя и несколько расходится с ними количественно;

– при $m = 1$ получен новый вывод формулы М.М. Протодьяконова, согласс-

но которой коэффициент крепости равен коэффициенту трения.

Влияние φ и C_0 на величину силы P предельного давления. Далее рассмотрим, как влияют параметры прочности дисперсных грунтов на силу P предельного давления свода обрушения, действующего на конструкции подземных сооружений: на рисунке 2.12, *а*, представлены графики $P(C_0)$ при различных значениях φ, а на рисунке 2.12, *б*, – графики $P(\varphi)$ при различных значениях C_0.

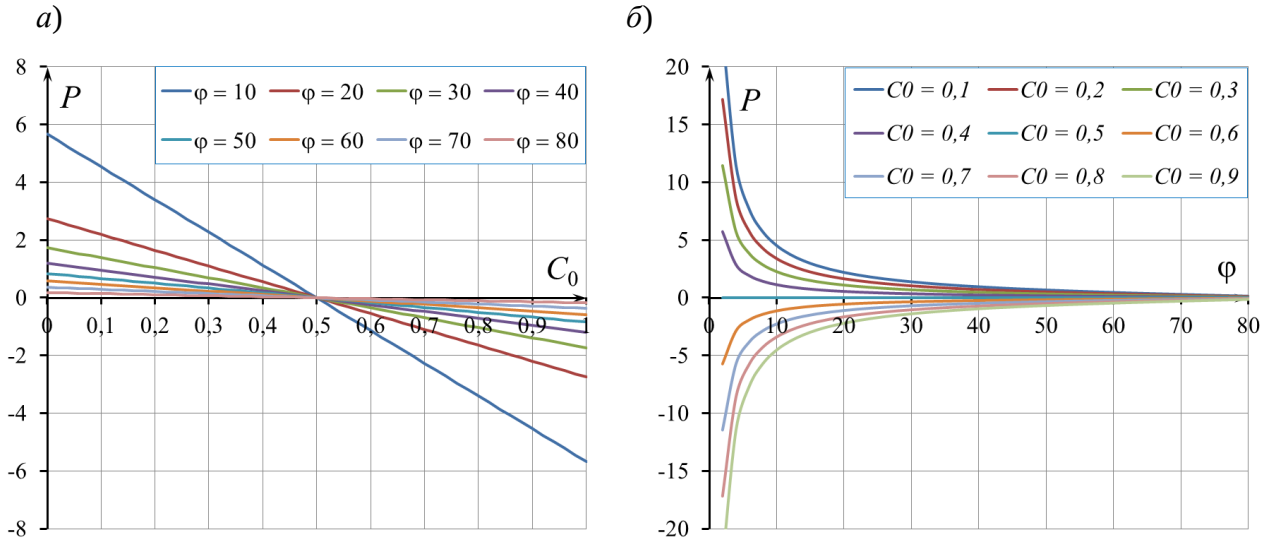


Рисунок 2.12 – Влияние прочностных характеристик дисперсных грунтов на силу P: *а* – графики $P(C_0)$ при различных φ; *б* – графики $P(\varphi)$при различных C_0

Графики $P(C_0)$ имеют то же содержание и ту же логику, что и графики $P(R_c)$, построенные для скальных грунтов (см. рисунок 2.10). Отличие состоит в линейности функций $P(C_0)$, что прямо следует из (2.33) при $m = 1$:

$$P = \frac{R_t}{C_0} a(\gamma a - 2C_0), \tag{2.39}$$

или, с учетом (2.37),

$$P = \frac{a}{\operatorname{tg}\varphi}(\gamma a - 2C_0). \tag{2.40}$$

Обратим внимание, что значение

$$C_0 = \frac{\gamma a}{2} \tag{2.41}$$

разделяет график $P(C_0)$ на положительную и отрицательную область. Поскольку

здесь так же, как и выше, используются относительные переменные $\gamma = 1$ и $a = 1$, то такое «разделяющее» значение $C_0 = 0{,}5$.

Поведение же графиков $P(\varphi)$ выглядит, на первый взгляд, вообще достаточно неожиданным (см. рисунок 2.12, *б*). В самом деле, при $C_0 > 0{,}5$ с увеличением φ сила P не снижается, как это было во всех предыдущих примерах расчета, а растет. Однако, это кажущееся противоречие снимается, если обратить внимание на то, что все графики построены при $C_0 = \text{const}$. Другими словами, если $C_0 = \text{const}$, то с увеличением φ будет падать прочность на растяжение R_t, что и приводит к росту силы P, необходимой для удержания пологих сводов обрушения в равновесии.

Замечание по результатам анализа решения при $m = 1$. Следует признать, что рассмотренные выше результаты, полученные при $m = 1$, носят больше теоретический, нежели практический характер. Это связано с тем, что все приведенные выкладки и расчеты базируются на предположении о том, что прямолинейный график сдвига сохраняет свою линейность и в области растяжения, т.е. при $\sigma_n > 0$.

К сожалению, поведение дисперсных грунтов в области $\sigma_n > 0$ является вопросом очень сложным и не до конца исследованным, а при решении практических задач сопротивлением растяжению дисперсных грунтов чаще всего просто пренебрегают.

Поэтому для анализа устойчивости дисперсных грунтов считаем более надежным методом – метод характеристик теории предельного равновесия грунтов. К этому методу в своих работах обращались К.В. Руппенейт [91] и Я.О. Стахнёв [116] для рассмотрения аналогичных задач, и к этому же методу прибегнем и мы в следующей главе, когда будем рассматривать устойчивость дисперсных грунтов над выработками криволинейного очертания.

Что касается скальных грунтов, то они вполне могут работать на растяжение, но для них прямолинейная огибающая предельных кругов Мора обычно нехарактерна.

Вместе с тем, полученные результаты носят явно неслучайный характер и,

как минимум, качественно совпадают с известными опытными данными об очертаниях сводов обрушения.

Таким образом, выявленные и описанные здесь закономерности, представляют интерес, по крайней мере, теоретический.

Описанные здесь особенности зависимостей $P(R_c)$ и для скальных, и для дисперсных грунтов, наверное, не исчерпывают всех аспектов силового взаимодействия свода обрушения с окружающим массивом в предельной стадии, но позволяют пролить свет на некоторые важные стороны их совместной работы.

2.11. Критические пролеты свода обрушения и критическая прочность

О критических пролетах свода обрушения. Напомним, что Я.О. Стахнёвым по результатам выполненного им теоретического анализа устойчивости свода обрушения в скальных грунтах были введены понятия о критических пролетах (ширинах) свода обрушения. В его работах, в частности, утверждается, что для грунта фиксированной прочности в зависимости от пролета l свода обрушения существует три типа устойчивости грунтового массива.

Если $l < l_{кр1}$, где $l_{кр1}$ – первый критический пролет свода обрушения, то обрушения грунта не происходит даже без крепления выработки. Это означает, что грунт над выработкой находится в устойчивом состоянии, а для того, чтобы произошло обрушение необходимо приложить отрицательную силу P – иначе говоря, для обрушения грунта в выработку необходимо приложить специальное дополнительное усилие, действующее вниз.

Если $l > l_{кр2}$, где $l_{кр2}$ – второй критический пролет, то – согласно Я.О. Стахнёву – вместо свода обрушения над выработкой образуется столб обрушения, то есть обрушение происходит на всю глубину выработки до самой поверхности [116].

И только, когда $l_{кр1} < l < l_{кр2}$, обрушение грунта над выработкой реализуется по схеме свода обрушения [116].

Как уже сказано, существование 1-го критического пролета $l_{кр1}$ подтвержда-

ется и нашими решениями «Эйлер – 2» и «Эйлер – 3». Так, на графиках $P(R_c)$ выделяются два участка (см. рисунок 2.7):

– участок, на котором $P > 0$, т.е. для удержания свода обрушения в равновесии требуется дополнительная поддерживающая сила $P > 0$;

– участок, на котором $P < 0$, т.е. для удержания свода в равновесии достаточно сил сопротивления грунта по контуру свода, а для его обрушения в выработку требуется дополнительная сила, направленная вниз: $P < 0$.

Что касается перехода от схемы свода обрушения к схеме столба, то такой переход в решениях «Эйлер – 2» и «Эйлер – 3» не подтверждается. Ограниченность же области определения в решении «Эйлер – 1» уже обсуждалась – она связана с ограниченностью действия гипотезы (2.9).

Таким образом, результаты решений, приводимых в настоящем исследовании, свидетельствуют о существовании только одного критического пролета – $l_{кр1}$, который разграничивает две расчетные ситуации:

1) потеря устойчивости грунта над выработкой по схеме свода обрушения;

2) полностью устойчивое состояние грунта над выработкой, нарушение которого требует приложения специальных усилий.

Формулы для критического пролета и критической прочности. Поскольку «Эйлер – 3» – наиболее общее решение из полученных, то для дальнейших рассуждений будем использовать формулы этого варианта решения. Приравняем нулю выражение (2.33) для силы P предельного давления:

$$0 = 2R_t a\left[\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{m}{1+m} - 1\right].$$

Учитывая, что $2a = l$ (см. рисунок 2.1), имеем

$$l_{кр1} = \frac{2C_0}{\gamma}\left(\frac{1+m}{m}\right)^m. \qquad (2.42)$$

Ориентируясь на подходы, предложенные в диссертации Я.О Стахнёва [116], можно взглянуть на границу, разделяющую два типа устойчивости, немного

по-другому. Предположим, ширина свода обрушения сразу задана и в дальнейшем остается неизменной:

$$a = \text{const}.$$

Найдем, при какой прочности грунт уже не сможет находиться в полностью устойчивом состоянии, и грунтовый массив над выработкой начнет терять устойчивость по схеме свода обрушения. Непосредственно из формулы (2.42) следует

$$C_0\left(\frac{1+m}{m}\right)^m = \gamma a\,. \tag{2.43}$$

Это равенство определяет критическую прочность грунта в том же смысле, в каком критическим был назван пролет $l_{кр1}$.

Обращает на себя внимание то, что в полученные равенства (2.42) и (2.43) не входит прочность грунта на одноосное растяжение R_t.

Строго говоря, все прочностные характеристики, входящие в условие прочности (2.6), должны вычисляться по результатам статистической обработки лабораторных испытаний. Из физической сути можно предположить, что, даже являясь формально независимыми, фактически между этими характеристиками существует какая-то взаимосвязь. Подробное рассмотрение этой взаимосвязи выходит за рамки настоящего исследования, однако, то обстоятельство, что прочность грунта растяжению R_t не входит в формулы (2.42) и (2.43), является, на наш взгляд, интересным результатом, поскольку эти формулы определяют, повторимся, важную границу – между полностью устойчивым состоянием грунта над выработкой и потерей устойчивости грунта над выработкой.

В завершение разговора об аналитических выражениях для критической прочности разберем еще одну ситуацию. Допустим, что параметр m может быть рассмотрен как независящий от других параметров прочности. Такая ситуация предусмотрена, например, ГОСТом 21153.8-88 «Определение прочности скальных пород» [24], где кривизна огибающей всегда определена степенью 3/8.

Тогда из (2.43) следует

$$C_0 = \gamma a\left(\frac{m}{1+m}\right)^m, \tag{2.44}$$

а, принимая в качестве исходных данных равенства (2.36), можем записать

$$R_c = 4\gamma a\left(\frac{m}{1+m}\right)^m . \qquad (2.45)$$

Анализ значений $l_{кр1}$ первого критического пролета. Для иллюстрации рассчитаем произвольный пример. Пусть характеристики прочности грунта, как и в предыдущих расчетах, заданы равенствами (2.36), прочность на одноосное сжатие R_c = 1000 кПа, удельный вес грунта γ = 25 кН/м^3. По формуле (2.36) C_0 = 0,25·1000 = 250 кПа, а по формуле (2.42) $l_{кр1}$ = 33,7 м.

Формально в приведенном примере, если пролет l < 33,7 м, то грунт над выработкой «держит себя сам», и крепления теоретически не требуется. Вместе с тем из практики подземного строительства хорошо известно, что в грунтах с R_c = 1000 кПа пролет $l \approx$ 30 м без крепления попросту невозможен.

На первый взгляд, имеем непреодолимое расхождение с практическими данными. Однако это не так. Дело в том, что в полученных решениях грунт предполагается сплошным однородным изотропным массивом, в каждой точке которого R_c = 1000 кПа = 1 МПа. На самом деле, грунты с R_c = 1000 кПа – это сильновыветрелые сильнотрещиноватые грунты, ослабленные многочисленными системами трещин.

В реальном проектировании к пределу R_c прочности таких грунтов практически всегда добавляют коэффициенты, именуемые коэффициентами трещиноватости, коэффициентами раздробленности, коэффициентами структурного ослабления и т.п. Примем коэффициент структурного ослабления согласно [130] равным 0,2 как для раздробленных грунтов. Тогда значение $l_{кр1}$ резко снижается – до 6,8 м, что является уже более приемлемым с точки зрения практики.

Далее, если принять R_c = 10 000 кПа = 10 МПа, то при коэффициенте структурного ослабления, равном единице, имеем первый критический пролет $l_{кр1}$ = 337 м, и это значение выглядит уже огромным, откровенно выходящим за рамки принятого в подземном строительстве.

Однако есть три обстоятельства, которые побуждают не отбрасывать полу-

ченные цифры, а продолжить начатый анализ.

Первое. Ширина выработки в 337 м действительно является экстраординарной для подземного строительства. Однако существуют природные подземные полости вполне сопоставимых размеров. Так, грот Саравак (о. Калимантан), один из самых больших в мире, имеет размеры по разным данным от 600 × 415 × 100 м^3 до 767 × 572 × 131 м^3 – соответственно, длина-ширина-высота. Грот Саравак имеет карстовое происхождение, он расположен в известняках Мелинау – рифовом комплексе верхнего эоцена и раннего миоцена. Даже не располагая более подробной информацией, можно зафиксировать, что пролеты шириной порядка 400…500 м, в принципе, могут существовать в скальных грунтах.

Второе. Выше мы уже указывали на то, что анализируемые решения получены в рамках гипотезы о том, что массив представляет собой сплошную среду. В то же время реальные скальные массивы такой сплошностью не обладают. Уже при образовании горные породы получают целые системы литогенетических трещин, а далее процесс трещинообразования обычно только развивается. При этом, чем больше размеры выработки, тем больше влияние этого фактора. Это является наиболее значимым слагаемым так называемого масштабного эффекта, который хорошо известен в механике скальных грунтов, но теоретическая оценка которого не входила в задачи настоящего исследования.

Третье. В устоявшейся практике проектирования и расчетов подземных сооружений, которые базируются на теории сводообразования, нагрузка на конструкции подземных сооружений определяется без учета сил сопротивления грунта по контуру свода обрушения, а только как давление от веса свода обрушения:

$$p = \gamma h . \qquad (1.1^*)$$

Это означает, что и в случае, когда $l < l_{кр1}$, и в случае, когда $l > l_{кр1}$, конструкции подземных сооружений будут рассчитываться на воздействие нагрузки от веса свода высотой h. Другими словами, нагрузки на подземные конструкции будут определяться не величиной $l_{кр1}$, а величиной h.

Второе из названных обстоятельств неявно накладывает определенные

ограничения на полученные решения, выявление и формулировка которых требует отдельных исследований. В то же время третье обстоятельство – и это будет показано ниже по тексту – позволяет рассмотреть вопрос о практическом использовании полученных решений (с некоторыми поправками), в том числе и для широкопролетных выработок.

Анализ значений высоты свода обрушения при $l = l_{кр1}$. На то, что значения первого критического пролета $l_{кр1}$ выглядят завышенными, в своей диссертации указывал и Я.О. Стахнёв. Им же было предложено объяснение этой коллизии, которое адаптируем к предлагаемым здесь решениям.

Выше уже было сказано, что согласно теории М.М. Протодьяконова в том виде, в каком она прошла столетнюю апробацию, нагрузка на подземные сооружения определяется по формуле (1.1), т.е. исходя из высоты *потенциально возможного* свода обрушения. Эта высота вычисляется, исходя из коэффициента крепости:

$$h = \frac{l/2}{f}.$$

Следуя опять же известным методикам, глубоко укоренившимся в практике подземного строительства и проектирования, коэффициент крепости может быть вычислен, например, по формулам самого М.М. Протодьяконова или Л.И. Барона:

$$f_{П} = \frac{R_c}{10} \qquad \text{или} \qquad f_{Б} = \frac{R_c}{30} + \sqrt{\frac{R_c}{3}}.$$

При $R_c = 10$ МПа в первом случае $f = 1$, во втором – $f = 2{,}2$.

Это означает, что при пролете l, равном первому критическому $l_{кр1} = 337$ м (см. выше), высота свода обрушения согласно формулам М.М. Протодьяконова и Л.И. Барона составила бы соответственно

$$h_{П} = \frac{l_{кр1}/2}{f_{П}} = 168{,}5 \text{ м} \quad \text{и} \quad h_{Б} = \frac{l_{кр1}/2}{f_{Б}} = 78{,}0 \text{ м}.$$

Теперь вернемся к предлагаемым решениям. Положив в (2.32) $x = a$, получим формулу для высоты свода обрушения:

$$h = \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma a}{C_0} \right)^{\frac{1}{m}}, \qquad (2.46)$$

т.е.

$$h = \frac{1000}{25} \cdot \left(\frac{25 \cdot 337 / 2}{2500} \right)^{\frac{1}{0,44}} = 130,9 \text{ м}.$$

Итак, принимая свод обрушения пролетом l = 337 м, имеем следующие значения его высоты:

– по М.М. Протодьяконову $h_{\text{П}}$ = 168,5 м;

– по Л.И. Барону $h_{\text{Б}}$ = 78,0 м;

– по решению «Эйлер – 3» h = 130,9 м;

Таким образом, полученные в настоящей работе формулы в данном случае приводят к конструкции более экономичной по сравнению с методикой М.М. Протодьяконова и более надежной по сравнению с тем, что дает формула Л.И. Барона.

Имея рассчитанную по формуле (2.46) высоту h, нетрудно вычислить коэффициент крепости из его определения:

$$f = \frac{337 / 2}{130,9} = 1,3.$$

Напомним, в данном примере расчета по М.М. Протодьяконову f = 1, а по Л.И. Барону f = 2,2.

Анализ значений *h* и *f* при больших пролетах *l* сводов обрушения. Для более полной информации рассчитаем параметры сводов обрушения, соответствующие первому критическому пролету, но рассчитанные по трем методикам – по М.М. Протодьяконову, по Л.И. Барону и по формулам «Эйлер – 3». Эти данные сведены в таблицу 2.2. Интересно отметить, что если параметры прочности R_t и C_0 увеличиваются пропорционально какому-либо числу (например, в соответствии с (2.36)), а параметр m не меняется, то в решении «Эйлер – 3» величины $l_{\text{кр1}}$ и h каждый раз принимают такие значения, что коэффициент крепости остается постоянным: f = const.

В самом деле, так как первый критический пролет определяется по формуле (2.42), а высота свода обрушения – по формуле (2.46), то

$$f = \frac{l_{\text{кр1}}/2}{h} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2C_0}{\gamma}\left(\frac{1+m}{m}\right)^m\cdot\left(\frac{R_t}{\gamma}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{-\frac{1}{m}}.$$

Из (2.42) также следует, что

$$a = \frac{C_0}{\gamma}\left(\frac{1+m}{m}\right)^m.$$

Тогда

$$f = \frac{C_0}{R_t}\left(\frac{1+m}{m}\right)^{m-1}. \qquad (2.47)$$

Таблица 2.2 – Высота *h* сводов обрушения и коэффициенты крепости *f* для сводов обрушения с пролетом, равным первому критическому

R_c, МПа	$l_{\text{кр1}}$, м	Высота *h* свода обрушения, м			Коэффициент крепости *f*		
		1	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*
1	33,7	168,5	27,6	13,1	0,1	0,6	1,3
5	168,5	168,5	57,8	65,5	0,5	1,5	1,3
10	337,0	168,5	78,0	130,9	1	2,2	1,3
20	673,9	168,5	103,7	261,8	2	3,2	1,3
25	842,4	168,5	113,2	327,3	2,5	3,7	1,3
50	1684,8	168,5	146,5	654,5	5	5,7	1,3
75	2527,3	168,5	168,5	981,8	7,5	7,5	1,3
100	3369,7	168,5	185,0	1309,1	10	9,1	1,3

Примечание: *1* – по М.М. Протодьяконову, *2* – по Л.И. Барону, *3* – по решению «Эйлер – 3»

Итак, сравнивая приведенные в таблице 2.2 значения *h* и *f*, рассчитанные тремя разными способами, можно сделать вывод, что при больших пролетах сводов обрушения предлагаемое решение «Эйлер – 3» дает более надежные решения, чем формулы М.М. Протодьяконова и Л.И. Барона [49].

Анализ значений *h* при малой прочности грунта. Ранее уже указывалось, что решение «Эйлер – 1» существует, только если R_c больше некоторого значения. Эта ограниченность области определения выше также уже обсуждалась и увязывалась с ограниченностью гипотезы (2.9). Вместе с тем, считаем правильным оговорить, что, возможно, существуют и другие факторы, приводящие к ограничен-

ности решения.

Так, в диссертации Я.О. Стахнёва рассматриваются два типа решений для сводов обрушения в скальных грунтах:

– для пологих сводов в скальных грунтах;

– для подъемистых сводов в полускальных.

Обсуждаемая гипотеза (2.9) применялась Я.О. Стахнёвым в решениях для пологих сводов. В решении для подъемистых сводов Я.О. Стахнёв применил иную расчетную схему и за счет этого сумел отказаться от гипотезы (2.9). В результате ему удалось получить распор в нижней части подъемистых сводов, но при этом также осталась и ограниченность области определения решения. Это, собственно, и позволило Я.О. Стахнёву сделать вывод о втором критическом пролете.

Сказанное заставляет более внимательно отнестись к идее Я.О. Стахнёва о переходе от свода обрушения к столбу в случае, когда превышено некоторое значение ширины выработки.

Другой причиной, по которой хотелось бы обсудить этот вопрос подробнее, конечно же, является безопасность, что в подземном строительстве всегда имеет совершенно особое значение.

Проанализируем поведение графиков $h(R_c)$, рассчитанных по формулам «Эйлер – 2» и «Эйлер – 3», а поскольку эти решения дают очень близкие значения h (см. рисунок 2.9), то для дальнейшего анализа будем в основном работать с формулами «Эйлер – 3». По мере уменьшения R_c высота h свода обрушения заметно растет, хотя и не так сильно, чтобы его можно было автоматически считать столбом обрушения. Тем не менее, какие-то критерии перехода от свода к столбу можно рассмотреть, но не из теоретических, а из чисто практических соображений.

Для наглядности рассмотрим произвольный пример, но с такими исходными данными, которые могли бы повстречаться на практике – например, при строительстве перегонного тоннеля метрополитена на линии глубокого заложения:

удельный вес грунта $\gamma = 22$ кН/м^3, половина ширины свода обрушения $a = 5$ м (половина ширины тоннеля плюс ширина боковой призмы обрушения).

В таблице 2.3 приведены относительные значения $\overline{R}_c$ прочности грунта (значения R_c даны по модулю), рассчитанные по формуле (2.46) относительные значения $\overline{h}$, а также фактические значения R_c прочности и высоты h свода, вычисленные по формулам (2.35).

Действительно с уменьшением прочности R_c высота h свода обрушения начинает увеличиваться довольно быстро. Однако, даже при $R_c = 0{,}11$ МПа имеем $h = 11{,}68$ м. При полупролете свода обрушения $a = 5$ м в пересчете это давало бы коэффициент крепости $f = a/h = 0{,}42$, что по шкале М.М. Протодьяконова немного лучше, чем у плывунов, для которых $f = 0{,}3$. Другими словами, мы получаем довольно высокий свод обрушения, но при достаточной глубине заложения (больше, чем $2h$ – если ориентироваться на СП 120 [109] и СП 122 [111]) это, видимо, не приведет к образованию столба.

Таблица 2.3 – Пример расчета фактических значений высоты h свода обрушения

$\overline{R}_c$	$\overline{h}$	R_c, МПа	h, м
0,5	5,642	0,055	28,21
1,0	2,335	0,110	11,68
1,5	1,394	0,165	6,97
2,0	0,966	0,220	4,83
2,5	0,728	0,275	3,64
3,0	0,577	0,330	2,88
3,5	0,474	0,385	2,37
4,0	0,400	0,440	2

С точки зрения повышения безопасности горнопроходческих работ и повышения надежности и безопасности эксплуатации подземных сооружений, можно было бы ввести какой-либо количественный критерий (взамен пп. СП 120 и пп. СП 122), сигнализирующий начало перехода от свода к столбу обрушения. Но разработка и назначение такого критерия является отдельной самостоятельной задачей, которая выходит за рамки задач, поставленных в настоящей работе.

2.12. Сопоставление с результатами известных решений

В этом параграфе сопоставим результаты, полученные по предлагаемым решениям, с данными решений В. Риттера и Я.О. Стахнёва, а также с результатами численного моделирования методом конечных элементов (МКЭ) и методом предельного анализа (МПА).

Приведем краткое обоснование выбора для сопоставлений именно этих авторов и методов.

Результаты В. Риттера (*Karl Wilhelm Ritter*) и Я.О. Стахнёва были выбраны как аналитические решения, наиболее близкие по постановке задачи. Особенно близким является решение Я.О. Стахнёва. Основной предмет сопоставления – графики зависимостей силы P от прочности R_c и высоты h свода обрушения также от прочности R_c.

Метод конечных элементов принят как самый популярный метод в практике геотехнических расчетов. Метод предельного анализа имеет на сегодняшний день меньшее распространение, чем МКЭ, однако он очень хорошо зарекомендовал себя при решении задач о предельном напряженном состоянии грунтовых массивов, причем как с условием прочности Кулона-Мора, применяемым для дисперсных грунтов, так и с условием прочности Хоека-Брауна (*Hoek-Brown*), разработанным и применяемым для расчетов скальных массивов. Основной предмет сопоставления – графики $P(R_c)$. Сопоставлений графиков $h(R_c)$ не планировалось, поскольку в численных решениях установить высоту h свода обрушения с достаточной точностью не представляется возможным.

Графики $P(R_c)$ и $h(R_c)$ уже рассматривались в п. 2.8 (см. рисунок 2.7 и рисунок 2.8) с целью выяснить, как соотносятся между собой результаты трех предложенных решений – «Эйлер – 1», «Эйлер – 2» и «Эйлер – 3». Это сопоставление позволило выявить, чем предложенные решения отличаются между собой и в чем они близки. Там же был сделан, в общем, очевидный вывод о том, что для дальнейшего анализа предпочтительнее использовать решение «Эйлер – 3» как наиболее общее, т.е. в отличие от двух других решений не содержащее дополнительных

гипотез. Поэтому в основном будем ориентироваться именно на решение «Эйлер – 3», в противном случае будут сделаны специальные оговорки.

Сопоставление с известными аналитическими решениями. Как указывалось в главе 1, основные результаты решения **В. Риттера** – это формула (1.15) для силы P предельного давления, в которой здесь выполним замену $l = 2a$,

$$P = \frac{a}{6R_t}(a^2\gamma^2 - 12R_t^2) \tag{2.48}$$

и уравнение (1.14) контура свода обрушения, из которого при $x = a$ следует формула для высоты h свода обрушения

$$h = \frac{\gamma a^2}{4R_t}. \tag{2.49}$$

Решение **Я.О. Стахнёва**, как описано в главе 1, сводится к поиску максимума функции $P(h)$, т.е.

$$\max_h P(h) = 2 \cdot \int_0^a \gamma y - \sigma_n - y' C_0 \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m dx \to \max,$$

где

$$y = \frac{hx}{a^2}(2a - x); \quad y' = \frac{2h}{a^2}(a - x); \quad \sigma_n = \frac{R_t}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}.$$

В рамках решений, полученных в настоящей работе, сопоставляемые величины рассчитываются следующим образом.

Решение «**Эйлер – 1**»:

– сила P — по формуле (2.20);

– высота h — по формуле (2.17) при $\alpha = 0$.

Решение «**Эйлер – 2**»:

– сила P как максимум функции $P(h)$ — по формуле (2.26);

– высота $h = h_{cr}$, где h_{cr} – такое значение h, которое при подстановке в (2.26) дает максимум P.

Решение «**Эйлер – 3**»:

– сила P — по формуле (2.33);

– высота h — по формуле (2.32) при $x = a$.

Сопоставление, как и раньше, будем выполнять для исходных данных (2.36) при $\gamma = 1$, $a = 1$.

Таблицы с числами, полученными пятью указанными способами, представлены в приложении А. Там же эти данные представлены и в графическом виде: на рисунке А.1 приведены графики $P(R_c)$, а на рисунке А.2 – графики $h(R_c)$.

На рисунке 2.13 показаны сопоставительные графики $P(R_c)$ и $h(R_c)$ в несколько сокращенном объеме: данные В. Риттера, Я.О. Стахнёва, а из полученных в настоящей работе – только результаты решения «Эйлер – 3».

На этих графиках значения R_c даны по модулю.

Сформулируем некоторые выводы, которые можно сделать из приведенного сопоставления.

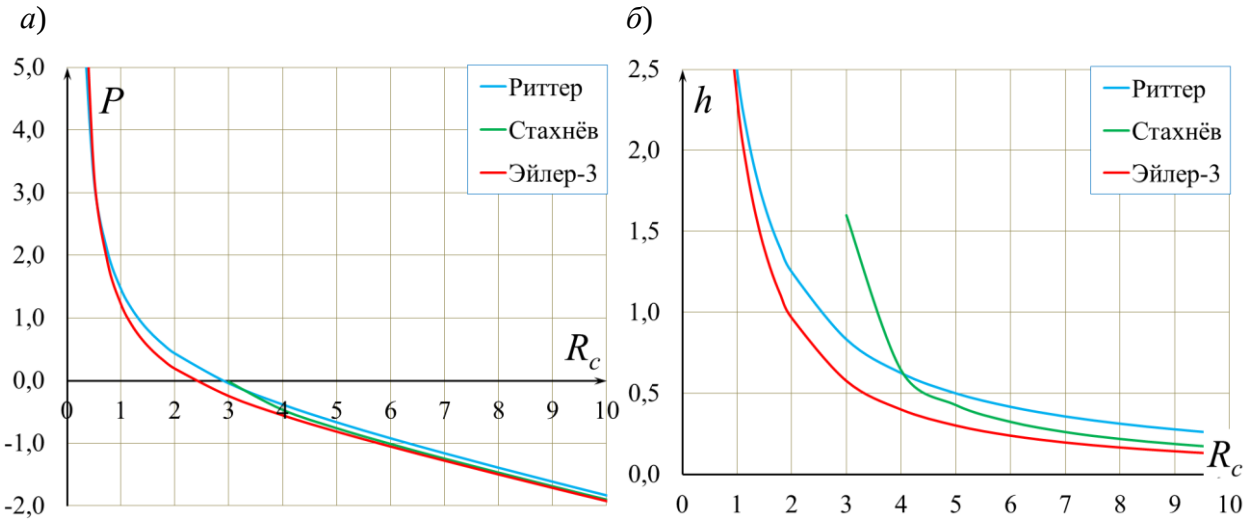


Рисунок 2.13 – Сопоставление решений В. Риттера, Я.О. Стахнёва и «Эйлер – 3»:
а – графики зависимостей $P(R_c)$; *б* – графики зависимостей $h(R_c)$

Первое. Решения В. Риттера, Я.О. Стахнёва и предложенное решение дают довольно близкие результаты, особенно в части графиков $P(R_c)$. Расхождения по высоте h свода обрушения более ощутимы.

Второе. Решение Я.О. Стахнёва имеет ограниченную область определения, что уже обсуждалось выше. Решения В. Риттера и «Эйлер – 3» существуют на всем интервале $0 < R_c < \infty$, где, подразумевается, значение R_c по модулю.

Третье. Показанное совпадение предельной силы по В. Риттеру и по «Эй-

леру – 3» носит в каком-то смысле случайный характер, поскольку в этих решениях просто разное количество исходных данных.

Остановимся на последнем обстоятельстве чуть подробнее. В самом деле, в решении В. Риттера только один параметр прочности грунта R_t, а в решении «Эйлер – 3» параметров прочности три – это R_t, C_0, и m (см. ф-лу (2.6)). Сравним график $P(R_t)$ по В. Риттеру с результатами «Эйлер – 3», полученными при:

– m = const и различных C_0 (рисунок 2.14, *а*);

– C_0 = const и различных m (рисунок 2.14, *б*).

Обратим внимание, что на данных графиках в качестве аргумента функций используется R_t, а не R_c, как до этого.

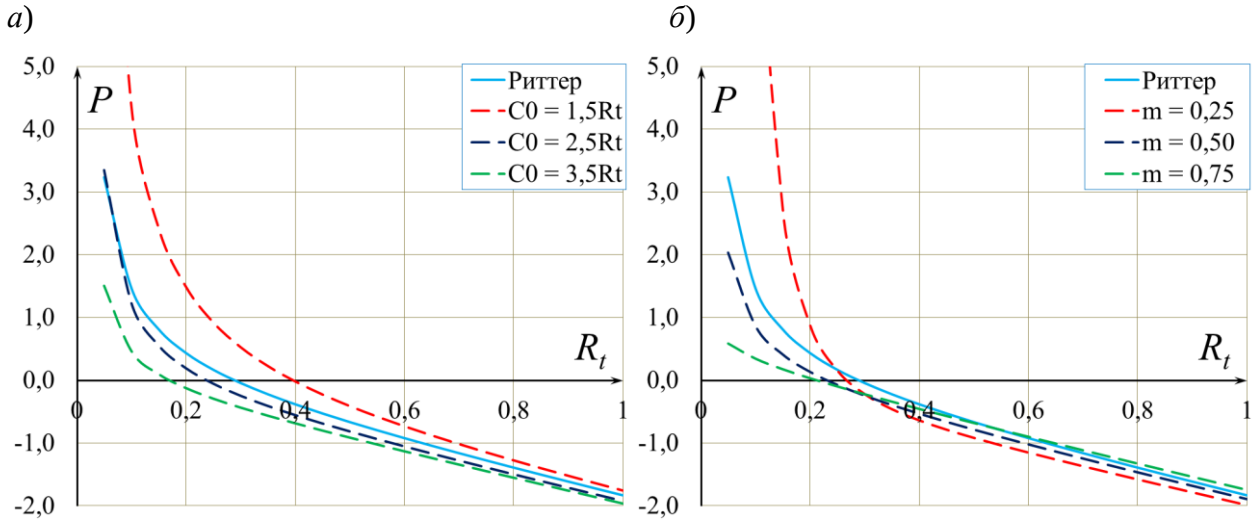


Рисунок 2.14 – Графики $P(R_t)$, рассчитанные по В. Риттеру и по «Эйлер – 3»:
а – при m = const; *б* – при C_0 = const

Как следует из представленных графиков, действительно, изменение параметров C_0 и m приводит к весьма заметному расхождению результатов по В. Риттеру и по предлагаемому решению.

Сопоставление с численными решениями. Цель заявленного сопоставления – проанализировать и сравнить с аналитическими оценками, полученными в настоящей работе, численную оценку предельной нагрузки на конструкции подземных сооружений от горного давления [49].

В первой главе дано описание основных положений МКЭ и МПА. Не повторяя того, что уже сказано, оговорим, что МКЭ будем решать идеально-

упругопластическую задачу с условием прочности *Hoek-Brown* (1.17), а МПА – идеально-жесткопластическую задачу с тем же условием прочности.

Корректность сопоставления с предлагаемым решением обеспечивалась заданием следующих значений параметров прочности: $a = 0{,}28$, $m_b = 7{,}8$ и $s = 1{,}0$ по *Hoek-Brown* и значений (2.36) для условия прочности (2.6). Графики $\sigma_1(\sigma_3)$ для обоих условий прочности с принятыми параметрами показаны на рисунке 2.15, *а* (на этом графике у напряжений σ_1 и σ_3 поменяны знаки).

Расчетная схема к численным решениям показана на рисунке 2.15, *б*. В центральной части нижней границы приложено давление, на старте расчета равное

$$p = \gamma H ,$$

где H – высота расчетной схемы.

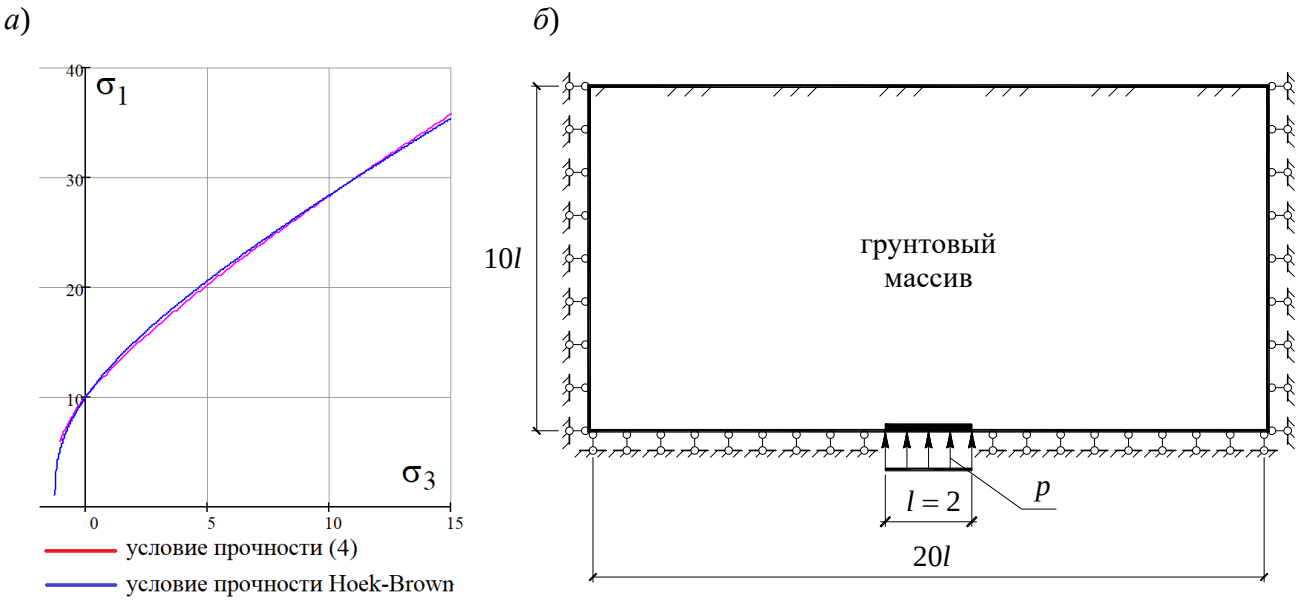


Рисунок 2.15 – К построению численных решений:
а – графики условия прочности *Hoek-Brown* и условия прочности (2.6);
б – расчетная схема к численным решениям по МПА и МКЭ

В рамках МПА и МКЭ по-разному реализуется поиск предельной нагрузки, но, упрощая, можно сказать, что на участке нижней границы длиной $l = 2$ в процессе решения нагрузка уменьшается до тех пор, пока не образуется предельное напряженное состояние в грунтовом массиве.

Сопоставление рассчитанных по формуле (2.33) зависимостей $P(R_c)$ с численными решениями показано на рисунке 2.16 (значения R_c даны по модулю).

Численные решения – это [49]:

– МПА в том виде, в каком он реализован в ПК *Optum G2*;

– МКЭ в том виде, в каком он реализован в ПК *MIDAS GTS NX*;

– МКЭ в том виде, в каком он реализован в ПК *PLAXIS 2D*.

Зависимости, полученные по предлагаемому решению, на том же рисунке обозначены как «Эйлер – 3».

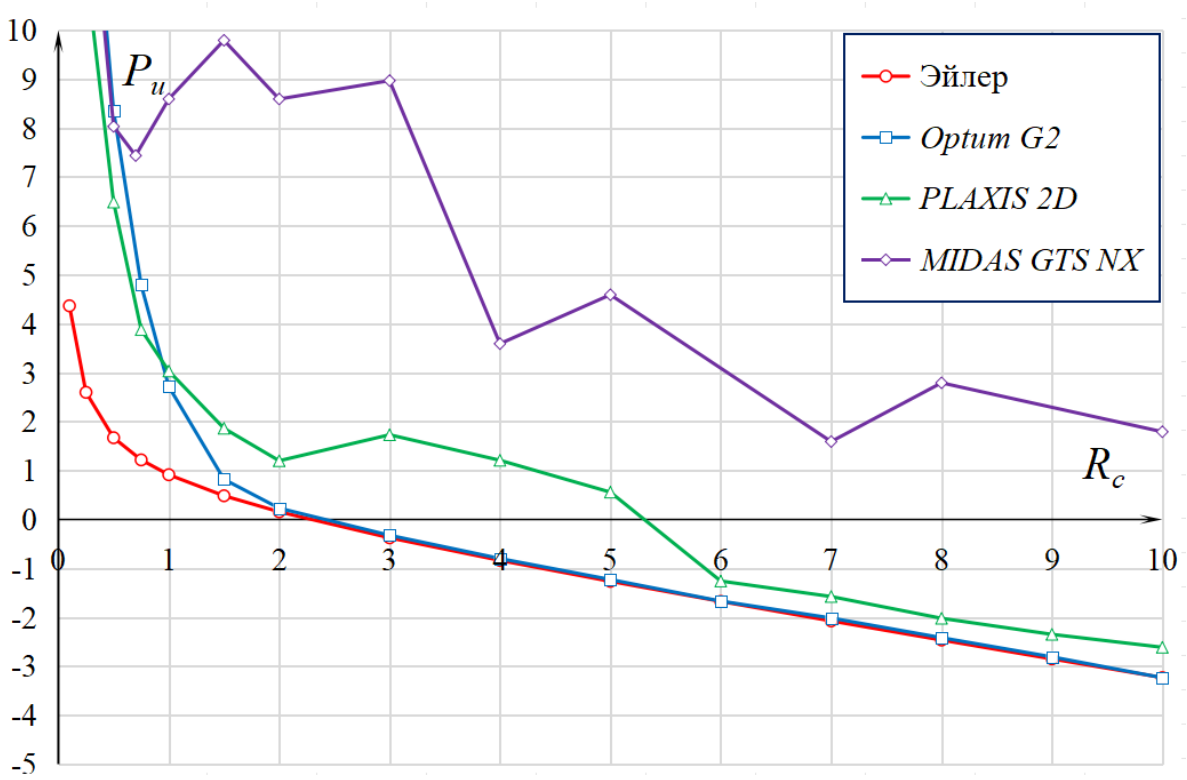


Рисунок 2.16 – Сопоставление результатов решения «Эйлер – 3» с результатами численных решений МКЭ (*MIDAS GTS NX*, *PLAXIS* 2*D*) и МПА (*Optum G*2)

Анализ результатов сопоставления позволяет сделать три основных вывода [49].

Первое. МКЭ дает нестабильные результаты для данного класса задач, во всяком случае, с условием прочности *Hoek-Brown*. В большей степени это относится к ПК *MIDAS GTS NX*. Результаты, полученные в ПК *PLAXIS* 2*D*, на первый взгляд, дают хотя бы качественное соответствие с предложенной аналитикой и оценками, полученными МПА. Как минимум, значения, рассчитанные в ПК *PLAXIS* 2*D*, не противоречат сами себе. Однако, как будет показано в главе 4, для задач с криволинейным очертанием верха подземных сооружений, ПК *PLAXIS* 2*D*

также показывает весьма нестабильные результаты.

Второе. Важно подчеркнуть: сказанное не следует рассматривать ни как попытку скомпрометировать ПК *MIDAS GTS NX* или ПК *PLAXIS* 2*D*, ни тем более как попытку скомпрометировать МКЭ. Во-первых, оба программных комплекса, использованные здесь для конечно-элементных расчетов, имеют давнюю историю и прошли достаточную апробацию для решения геотехнических задач. Во-вторых, и конечно-элементные программные комплексы, и сам МКЭ продолжают свое интенсивное развитие. Достаточно вспомнить о том, что весьма продолжительное время МКЭ не удавалось получить, например, решения задачи о предельном давлении штампа на грунтовое основание в идеально-упругопластической постановке. Сейчас же эта задача может быть посчитана практически на любом из распространенных геотехнических программных комплексов. Вместе с тем, следует иметь в виду, что при расчете МКЭ предельной нагрузки на упругопластические основания, обладающие сухим трением, действительно возникают проблемы, которые и сегодня до конца не решены [40]. Поэтому, на наш взгляд, при использовании МКЭ в подобных расчетных случаях следует проявлять осторожность и стараться контролировать результаты МКЭ какими-либо альтернативными методами.

Третье. МПА дает очень близкие результаты к предлагаемому решению. Во-первых, это подтверждает надежность МПА в расчетах предельных нагрузок. Во-вторых, данный вывод может рассматриваться как аргумент в пользу применимости МПА к решению конкретно этого класса задач. В-третьих, такая сходимость установлена и при других исходных данных (эти результаты не включены в текст диссертации ввиду ограниченного объема), что фактически исключает простое совпадение. Поскольку предлагаемое решение и МПА реализуют совершенно различные уравнения, совпадение результатов представляет собой своего рода взаимную верификацию двух разных подходов к анализу данной задачи. Следовательно, можно говорить о том, что и предлагаемое решение, и МПА действительно корректно описывают предельное равновесие свода обрушения в рамках поставленной задачи.

Выводы по главе 2

1. Сформулирована и решена задача о сводообразовании в рамках расчетной схемы Риттера-Стахнёва как задача вариационного исчисления. Дано три варианта решения этой задачи по мере последовательного отказа от гипотез, принятых Я.О. Стахнёвым в его решении.

2. Решения получены, в основном, в замкнутом виде. Среди прочего, удалось смоделировать распор в нижней части свода при малых значениях прочности R_c. Выполнен обстоятельный анализ полученных решений. Исследовано влияние характеристик прочности грунта на параметры свода обрушения и предельную нагрузку. Установлено влияние кривизны огибающей предельных кругов Мора на форму очертания свода и распределение нормальных напряжений по его контуру. Получено подтверждение вывода М.М. Протодьяконова о равестве коэффициента трения и коэффициента крепости в дисперсных грунтах. Проанализировано предположение Я.О. Стахнёва о существовании двух критических пролетов свода обрушения. Подтверждено существование первого критического пролета.

3. Выполнено сопоставление полученных решений с решениями В. Риттера, Я.О. Стахнёва, а также с численными решениями МКЭ и МПА. Показана близость к результатам Я.О. Стахнёва за исключением ограниченности области определения функции $P(R_c)$. Также установлено хорошее соответствие с результатами МПА. МКЭ в этой задаче демонстрирует нестабильность решений, показывая и большое расхождение с аналитикой и с МПА, и внутреннюю противоречивость оценок предельной нагрузки.

ГЛАВА 3. УСТОЙЧИВОСТЬ СВОДА ОБРУШЕНИЯ НАД КРИВОЛИНЕЙНЫМИ КОНСТРУКЦИЯМИ В СКАЛЬНЫХ И ДИСПЕРСНЫХ ГРУНТАХ

3.1. Описание типа исследуемых сооружений

В этой главе рассматриваются вопросы статического анализа устойчивости свода обрушения, который формируется над широкими подземными сооружениями с верхними несущими конструкциями криволинейного очертания (рисунок 3.1, *а*). Частным случаем таких сооружений можно считать временную крепь калоттной части подземных выработок (рисунок 3.1, *б*).

Термин «калотта» употребляется в тоннеле- и метростроении при поэтапном раскрытии выработки. Если прочности грунта недостаточно, чтобы вести проходку тоннеля сразу на все сечение, то раскрытие сечения осуществляют в несколько этапов. Например, сначала разрабатывают верхнюю часть сечения тоннеля, затем – нижнюю. Верхняя часть выработки при ее поэтапном раскрытии называется калоттой, нижняя часть – штроссой.

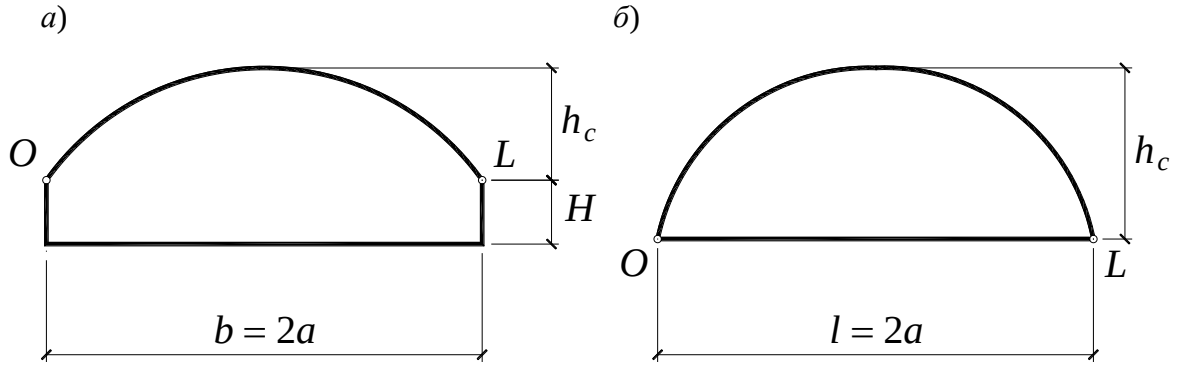


Рисунок 3.1 – Исследуемые типы подземных сооружений:
а – сооружение, у которого $b > H + h_c$; *б* – калотта

Как следует из рисунка 3.1, под широкими подземными сооружениями здесь будем понимать такие сооружения, у которых высота ($H + h_c$) существенно меньше его ширины b – таковы, например, односводчатые станции метрополитенов.

С точки зрения теории сводообразования заявленная конструктивная схема имеет две отличительные черты.

Первая. Из-за того, что ширина b такой конструкции предполагается большей, чем высота $H + h_c$, боковыми призмами обрушения, которые должны формироваться в пределах высоты H, можно пренебречь. Имеются в виду призмы обрушения по П.М. Цимбаревичу (см. рисунок 1.5). Таким образом, здесь ширина сооружения должна быть равна пролету свода обрушения:

$$b = l.$$

Сразу оговорим, что использованный здесь оборот «ширина больше высоты» носит характер не количественный, а качественно-описательный – *больше* в достаточной степени для того, чтобы боковые призмы обрушения не формировались в пределах высоты H, либо ими можно было пренебречь в силу их малости по сравнению с размерами подземного сооружения. Вообще говоря, на формирование боковых призм влияют не только размеры подземного сооружения, но и прочность вмещающего грунтового массива. Уточнение же соответствующих границ соотношения $b/(H + h_c)$ и его влияния на параметры зон обрушения является самостоятельной, достаточно объемной и трудоемкой задачей, которая не входила в число задач настоящего исследования.

Вторая. Весь опыт подземного строительства свидетельствует в пользу того, что криволинейное очертание выработки с увеличением его кривизны приближается к контуру свода обрушения, а, значит, способствует снижению нагрузки от горного давления на крепь выработки. Ситуация, когда $h_c > h$, где h – высота свода обрушения, пролет l которого равен ширине b выработки, будет проанализирована отдельно главе 4.

Поскольку сама прочность скальных и дисперсных грунтов имеет существенно различную природу, а формирование сводов обрушения в скальных и дисперсных грунтах, как следствие, имеет принципиальные отличия (частично об этом уже шла речь выше, см. п. 2.10), то и построение решений будем осуществлять для этих двух случаев разными методами:

– для случая скальных грунтов будем применять аппарат вариационно-

го исчисления;

– в случае дисперсных грунтов воспользуемся методом характеристик теории предельного равновесия грунтов.

3.2. Постановка и решение задачи в скальных грунтах

Постановка задачи. Рассмотрим задачу устойчивости свода обрушения, формирующегося в скальных грунтах над подземным сооружением с криволинейным очертанием верхней части конструкции. Предположим, что это очертание может быть описано одной гладкой функцией. Статический анализ равновесия свода обрушения в этих условиях будем осуществлять на базе решения «Эйлер – 3», полученного и описанного в главе 2.

На рисунке 3.2, *а*, показана общая схема к задаче. В грунтовом скальном массиве *1* устраивается подземное сооружение *3* шириной *OL*, над которым формируется свод обрушения *2*. Требуется определить вертикальную нагрузку от свода обрушения на криволинейную конструкцию подземного сооружения [50].

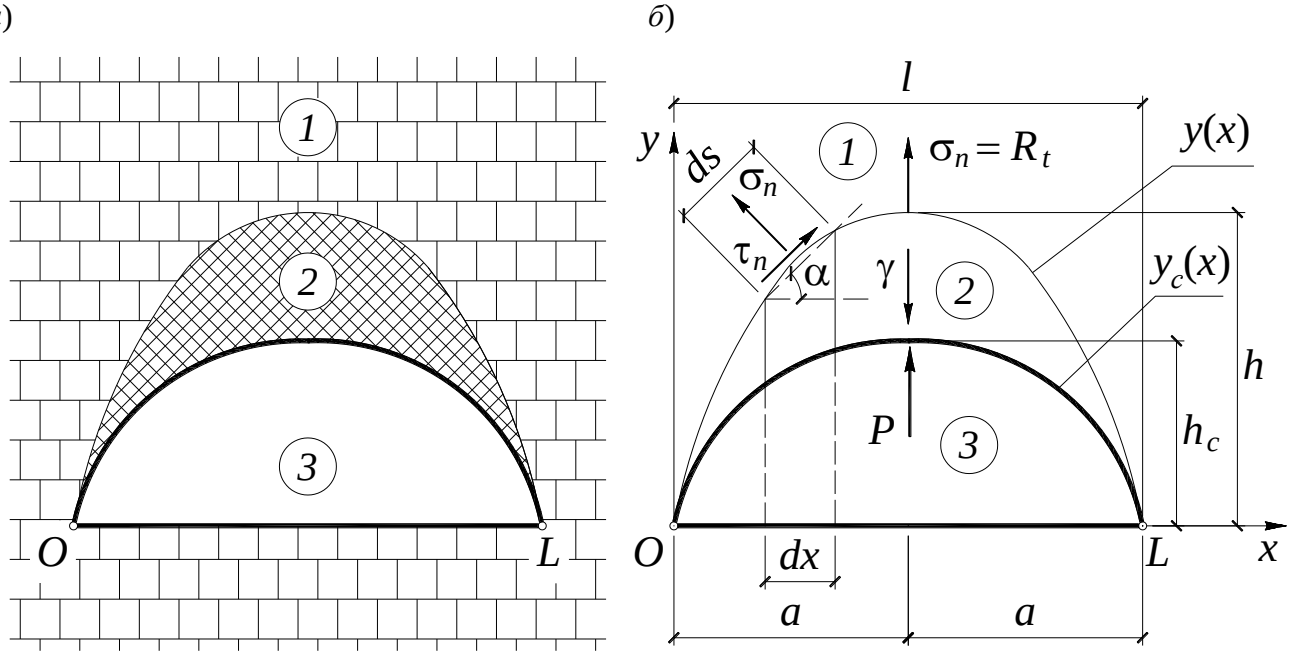


Рисунок 3.2 – К задаче о сводообразовании над калоттой или криволинейными конструкциями (*1* – грунтовый массив, *2* – свод обрушения, *3* – калотта или подземное сооружение) [50]: *а* – принципиальная схема; *б* – расчетная схема

На рисунке 3.2, *б*, показана расчетная схема свода обрушения и действующие на нее усилия. Контур свода обрушения описывается, как и в главе 2, заранее неизвестной функцией $y(x)$, контур подземной выработки описывается некоторой заданной функцией $y_c(x)$. Ширина свода обрушения равна $l = 2a$, высота равна h и в отличие от ширины заранее неизвестна. Ширина подземного сооружения также равна $b = l = 2a$, а его высота обозначена как h_c (см. выше).

Свод стремится обрушиться в выработку под действием собственного веса G. Этому препятствуют силы сопротивления грунта, действующие по контуру свода обрушения, описываемому как раз неизвестной функцией $y(x)$. Это сопротивление грунта характеризуется предельными напряжениями σ_n и τ_n. Вертикальную проекцию суммы сил сопротивления грунта обрушению, как и в главе 2, обозначим через ΣR. В силу симметрии и физического смысла задачи в самой верхней точке свода обрушения, предположим, будет действовать только нормальное напряжение:

$$\sigma_n = R_t, \qquad \tau_n = 0.$$

Здесь, напомним, R_t – прочность скального грунта на одноосное растяжение.

Наконец, в случае, если окажется, что $G > \Sigma R$, снизу необходимо приложить вертикальную удерживающую силу P, которая в силу третьего закона Ньютона и будет силой давления грунта свода обрушения на криволинейную конструкцию подземного сооружения [69].

Составим уравнение равновесия всех сил на вертикальную ось, которое в принятых обозначениях ничем не будет отличаться от (2.1):

$$P = G - \Sigma R. \qquad (2.1^*)$$

Главным отличием данного решения от решения «Эйлер – 3», принятого здесь в качестве базового, будет выражение для собственного веса свода обрушения, которое примет следующий вид:

$$G = 2 \cdot \int_0^a \gamma \cdot [y(x) - y_c(x)] dx.$$

Сравнив схемы, показанные на рисунке 2.1 и на рисунке 3.2, *б*, делаем оче-

видный вывод о том, что уравнение для вертикальной проекции сил сопротивления грунта в данном решении полностью совпадает с уравнением (2.3), которое с учетом равенств (2.4) принимает вид (см. п. 2.1):

$$\Sigma R = 2 \cdot \int_0^a [\sigma_n(x) + y'(x) \cdot \tau_n(x)] dx .$$

Подставив выражения для G и для ΣR в уравнение равновесия (2.1*), получим:

$$\frac{1}{2} P = \int_0^a \gamma(y - y_c) - \sigma_n - y' \tau_n dx .$$

С целью сделать запись уравнений более компактной здесь при написании функций опускаются указания на аргумент: например, просто y' вместо $y'(x)$, просто σ_n вместо $\sigma_n(x)$ и т.д.

Добавив в полученное равенство закон прочности скального грунта (2.6), связывающий нормальные и касательные напряжения σ_n и τ_n по контуру свода обрушения, приходим к выражению для силы предельного давления грунта на криволинейные конструкции подземных сооружений при сводообразовании:

$$\frac{1}{2} P = \int_0^a \gamma(y - y_c) - \sigma_n - y' C_0 \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m dx . \qquad (3.1)$$

Это равенство представляет собой основное уравнение плоской задачи теории сводообразования для подземных сооружений с криволинейным очертанием верхних несущих элементов конструкций.

Поскольку очертание $y(x)$ свода обрушения заранее неизвестно, то, исходя из физического смысла задачи, поставим цель найти такое очертание, которое бы дало максимум силы P. Это же касается и функции распределения нормальных напряжений $\sigma_n(x)$.

Таким образом, сила P есть функционал двух неизвестных функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$. Требуется определить экстремум этого функционала [50].

Решение задачи. Запишем систему (2.27) уравнений Эйлера [49, 50, 144]:

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0; \qquad F'_{\sigma_n} - \frac{d}{dx}F'_{\sigma'_n} = 0, \qquad (2.27^*)$$

где F – подынтегральное выражение равенства (3.1):

$$F[y(x), \sigma_n(x)] = \gamma(y - y_c) - \sigma_n - y' C_0 \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m.$$

В главе 2 в систему уравнений (2.27) подставлялась функция F, которая являлась подынтегральным выражением равенства (2.7). Уравнения (2.7) и (3.1) отличаются единственным слагаемым – это слагаемое $\gamma y_c(x)$. Оно не зависит от y, y', σ_n, σ_n', поэтому при дифференцировании по указанным переменным согласно (2.27) слагаемое $\gamma y_c(x)$ просто пропадает.

Из сказанного следует, что поиск функций $y(x)$ и $\sigma_n(x)$ в задаче о своде обрушения над криволинейным сооружением даст точно такой же результат, что и в решении «Эйлер – 3» (см. главу 2, ф-лы (2.32) и (2.30)):

$$y = \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left[a^{\frac{1}{m}} - (a-x)^{\frac{1}{m}}\right]; \ \sigma_n = R_t \left\{1 - \left[\frac{\gamma}{C_0} \cdot (a-x)\right]^{\frac{1}{m}}\right\}. \qquad (3.2)$$

В то же время очевидно, что подстановка этих выражений в формулу (3.1) и последующее интегрирование даст результат отличный от (2.33).

Подставим (2.30*) и (2.32*) в уравнение (3.1):

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a \gamma \left\{\frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left[a^{\frac{1}{m}} - (a-x)^{\frac{1}{m}}\right] - y_c(x)\right\} - R_t \left\{1 - \left[\frac{\gamma}{C_0} \cdot (a-x)\right]^{\frac{1}{m}}\right\} -$$

$$- \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{m} \cdot (a-x)^{\frac{1}{m}-1} \cdot C_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{R_t} \cdot R_t \left\{1 - \left[\frac{\gamma}{C_0} \cdot (a-x)\right]^{\frac{1}{m}}\right\}\right)^m dx.$$

Упростим выражение, стоящее под интегралом:

$$\frac{1}{2}P = \int_0^a R_t \cdot \left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left[a^{\frac{1}{m}} - (a-x)^{\frac{1}{m}}\right] - \gamma y_c(x) - R_t + R_t \left[\frac{\gamma}{C_0} \cdot (a-x)\right]^{\frac{1}{m}} -$$

$$-\frac{R_t}{m}\cdot\left[\frac{\gamma}{C_0}(a-x)\right]^{\frac{1}{m}}dx,$$

или

$$\frac{1}{2}P=\int_0^a R_t\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}-R_t\left[\frac{\gamma}{C_0}(a-x)\right]^{\frac{1}{m}}-\gamma y_c(x)-R_t+R_t\left[\frac{\gamma}{C_0}\cdot(a-x)\right]^{\frac{1}{m}}-$$

$$-\frac{R_t}{m}\cdot\left[\frac{\gamma}{C_0}(a-x)\right]^{\frac{1}{m}}dx.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}P=\int_0^a\frac{R_t}{m}\left\{\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\left[ma^{\frac{1}{m}}-(a-x)^{\frac{1}{m}}\right]-m\right\}-\gamma y_c(x)dx.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\frac{1}{2}P=\frac{R_t}{m}\left\{\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\left[ma^{\frac{1}{m}}x+\frac{m}{m+1}(a-x)^{\frac{1}{m}+1}\right]-mx\right\}\Bigg|_0^a-\int_0^a\gamma y_c(x)dx=$$

$$=\frac{R_t}{m}\left\{\left(\frac{\gamma}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\left[ma^{\frac{1}{m}+1}-\frac{m}{m+1}a^{\frac{1}{m}+1}\right]-ma\right\}-\frac{1}{2}G_c.$$

Здесь G_c – вес фигуры, ограниченной сверху функцией $y_c(x)$, а снизу – линией OL (см. рисунок 3.2, *б*). С точки зрения физического содержания задачи лучше сказать чуть по-другому: G_c – это вес грунта, вынутого при разработке грунта в сечении, ограниченном линиями $y_c(x)$ и OL.

Окончательно имеем:

$$P=2R_t a\left[\left(\frac{\gamma a}{C_0}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{m}{m+1}-1\right]-G_c. \qquad (3.3)$$

Некоторые общие выводы. Итак, полученное решение позволяет сделать три важных вывода [66, 67].

Первый. При криволинейном очертании широких подземных сооружений – например, станций метрополитенов или калотт – очертание свода обрушения и распределение напряжений по контуру свода определяются формулами (3.2), т.е. не зависят от очертания этого подземного сооружения.

Второй. Сравнивая формулы (2.33) и (3.3), делаем вывод о том, что сила P предельного давления свода обрушения на крепь широких выработок уменьшается на величину веса G_c грунта, вынутого при разработке этой выработки.

Третий. Если контур подземного сооружения повторяет контур свода обрушения, то такая конфигурация подземного пространства будет не только устойчивой, но и будет иметь некоторый запас [50].

Добавим к третьему выводу небольшой комментарий.

В равенстве (3.3) обозначим первое слагаемое через P_{tot}. Тогда (3.3) можно представить в виде:

$$P = P_{tot} - G_c, \tag{3.4}$$

Сопоставив (2.33), (3.3) и (3.4), заключаем, что P_{tot} – это сила, необходимая для удержания в равновесии «полного» свода обрушения, т.е. такого свода, который занимает все пространство ниже контура $y(x)$ до отрезка OL (см. рисунок 3.1 или рисунок 3.2, *б*). Ясно, что P_{tot} отвечает $h_c = 0$.

Далее, обратимся к уравнению равновесия (2.1*), где G – это вес свода обрушения над калоттой, т.е. вес фигуры, ограниченной сверху контуром свода обрушения $y(x)$, а снизу – контуром калотты $y_c(x)$. Очевидно, что

$$G = G_{tot} - G_c,$$

где G_{tot} – вес «полного» свода обрушения, который, повторимся, ограничен сверху линией $y(x)$, а снизу – отрезком OL (см. рисунок 3.2, *б*).

Тогда уравнение (2.1*) можно представить в виде:

$$P_{tot} - G_c = G_{tot} - G_c - \Sigma R,$$

или

$$P = G_{tot} - G_c - \Sigma R. \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что если калотта (или широкое подземное сооружение) за-

нимают все пространство свода обрушения, т.е. $G_{tot} = G_c$, то

$$P = -\Sigma R, \tag{3.6}$$

что повторяет сделанный выше вывод.

Из теоретического интереса определим условие, при котором, будучи в предельном состоянии, грунт будет находиться в равновесии уже без какого-либо запаса. Приравняем (3.5) нулю, откуда найдем

$$G_c = G_{tot} - \Sigma R. \tag{3.7}$$

Подчеркнем, что все сказанное справедливо, если выполняется условие (см. рисунок 3.2, *б*):

$$h_c < h. \tag{3.8}$$

Высота h вычисляется по первой из формул (3.2) при $x = a$:

$$h = \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma a}{C_0} \right)^{\frac{1}{m}}. \tag{3.9}$$

3.3. Некоторые результаты решения задачи о своде обрушения над калоттой в скальных грунтах

Исходные данные и уравнение калотты. Продолжим анализировать результаты полученного решения. Дальнейший анализ будем осуществлять, как и в главе 2, в относительных переменных $\gamma = 1$ и $a = 1$.

Параметры условия прочности (2.6) зададим равенствами (2.36):

$$R_t = -0{,}1 \cdot R_c, \qquad C_0 = -0{,}25 \cdot R_c, \qquad m = 0{,}44. \tag{2.36*}$$

Для контура криволинейной конструкции подземного сооружения (калотты) примем уравнение:

$$y_c = h_c \left[1 - \left(\frac{a - x}{a} \right)^{\frac{1}{m}} \right]. \tag{3.10}$$

Такая функция принята с целью обеспечения корректности теоретических исследований, которые на данном этапе состоят в определении влияния очертания

калотты на силу P предельного давления грунта. Согласно принятой расчетной схеме (рисунок 3.2, *б*), калотта всегда должна находиться «внутри» свода обрушения. Этого можно добиться, если очертание калотты сделать подобным очертанию свода обрушения, т.е. для контура калотты принять уравнение (3.10). Покажем это.

Перепишем уравнение (3.2) свода обрушения в виде:

$$y = \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma a}{C_0} \right)^{\frac{1}{m}} \cdot \left[1 - \left(\frac{a - x}{a} \right)^{\frac{1}{m}} \right].$$

Множители перед скобкой представляют собой высоту h свода обрушения, отсчитываемую от линии OL (см. рисунок 3.2, *б*). Собственно, этот же факт отражает и формула (3.9). Тогда уравнение свода обрушения можно записать как

$$y = h \cdot \left[1 - \left(\frac{a - x}{a} \right)^{\frac{1}{m}} \right].$$

Сравнивая это равенство с уравнением очертания калотты (3.10), видим, что калотта и свод обрушения являются подобными фигурами.

Определим вес грунта, вынутого при разработке такой калотты:

$$G_c = 2 \cdot \int_0^a \gamma y_c dx = 2 \cdot \int_0^a \gamma h_c \left[1 - \left(\frac{a - x}{a} \right)^{\frac{1}{m}} \right] dx = \frac{2\gamma h_c a}{1 + m}.$$

Тогда выражение (3.3) для силы P предельного давления грунта примет вид:

$$P = 2R_t a \left[\left(\frac{\gamma a}{C_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{m+1} - 1 \right] - \frac{2\gamma h_c a}{1 + m}. \qquad (3.11)$$

Анализ графиков $P(R_c)$ при h_c = const. На рисунке 3.3 показаны некоторые результаты расчета силы P предельного давления при различных значениях параметра m и некоторых фиксированных значениях высоты калотты: $h_c = 0{,}1$; $h_c = 0{,}5$; $h_c = 1{,}0$; $h_c = 5{,}0$.

Качественно эти графики повторяют поведение функций $P(R_c)$, которое уже

обсуждалось во 2-й главе по результатам решения основной задачи о сводообразовании (см. рисунок 2.7). Однако, у зависимостей, полученных здесь, есть важная характерная особенность: поскольку все выкладки, сделанные выше (см. п. 3.2), справедливы только при соблюдении условия (3.8), то для задачи с калоттой функции $P(R_c)$ имеют ограниченную область определения. Особенно это проявляется при больших значениях R_c.

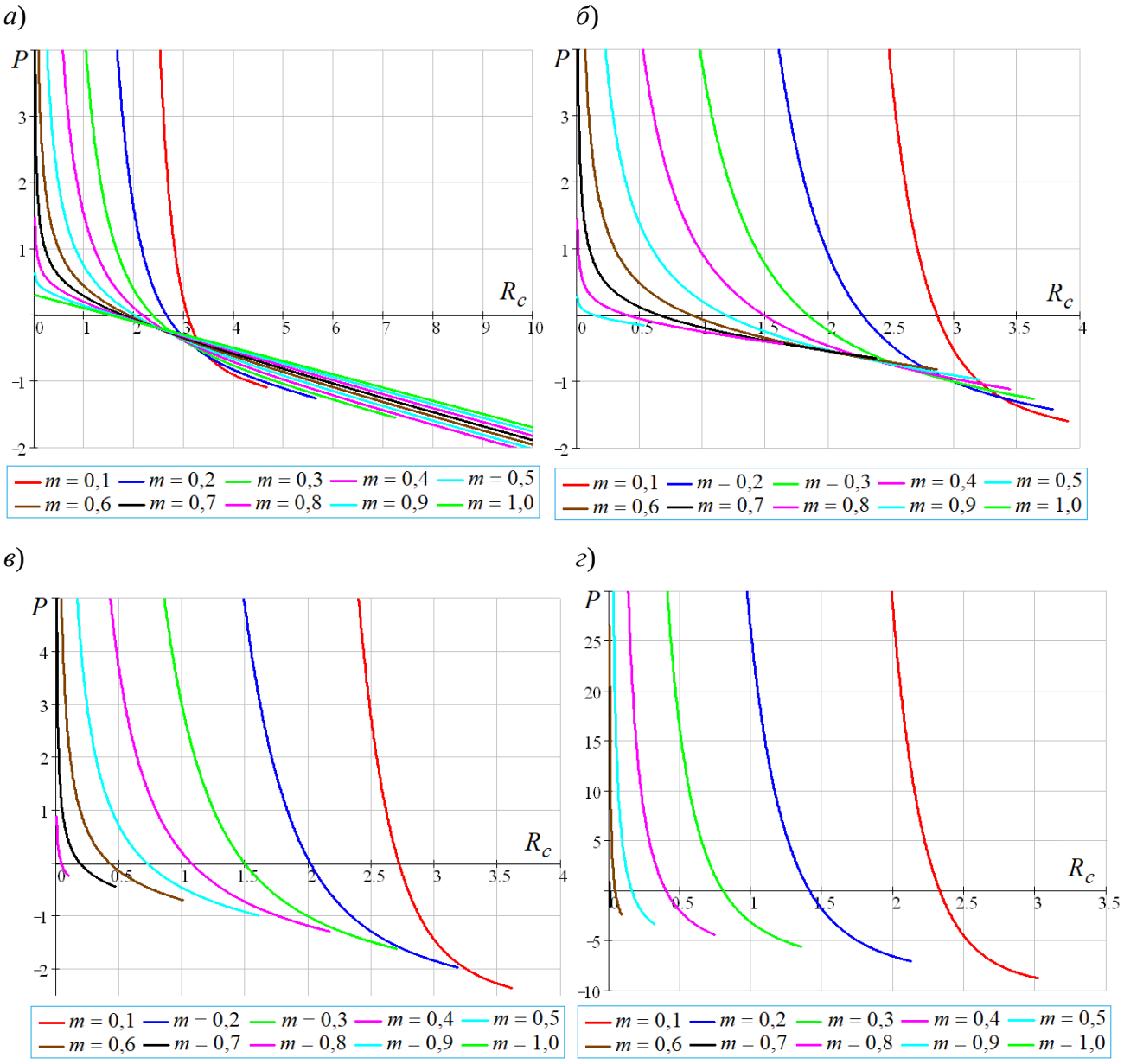


Рисунок 3.3 – Графики функции $P(R_c)$ при различных значениях m:
а – для $h_c = 0{,}1$; *б* – для $h_c = 0{,}5$; *в* – для $h_c = 1{,}0$; *г* – для $h_c = 5{,}0$

Покажем это на простом примере. При $R_c = 3{,}5$ и $m = 0{,}1$ по формуле (3.9)

имеем $h = 1{,}33$, следовательно, в рамках принятой расчетной схемы при $R_c = 3{,}5$ и $m = 0{,}1$ можно построить решение для значений высоты калотты:

$h_c = 0{,}1$ (рисунок 3.3, *а*);

$h_c = 0{,}5$ (рисунок 3.3, *б*);

$h_c = 1{,}0$ (рисунок 3.3, *в*),

но нельзя построить решения для $h_c = 5$ (рисунок 3.3, *г*).

Итак, поскольку с увеличением R_c высота h свода обрушения снижается, то по мере увеличения h_c сокращается область определения функции $P(R_c)$.

Это, конечно же, не означает, что нельзя построить решение при $h_c > h$, но в этом случае придется менять базовую расчетную схему (см. рисунок 3.2, *б*). Теоретически этот случай в данной диссертации не рассматривался, но для практического применения будут сделаны некоторые предложения в главе 4.

В приложении В приведены более подробные графики $P(R_c)$ для разных значений высоты h_c калотты. Отметим, что все графики даны на одинаковом интервале значений: $R_c \in [0; 5]$ и $P \in [-4; +4]$. Это сделано для большей наглядности динамики влияния высоты h_c на поведение графиков.

Анализ графиков $P(R_c)$ и $P(h_c)$ при m = const. Представим эти же результаты в несколько ином виде. Проанализируем функции $P(R_c)$, построенные для m = const, но при различных h_c.

Как видно из рисунка 3.4, *а*, графики $P(R_c)$ качественно повторяют то поведение, которое было зафиксировано в классической задаче о сводообразовании во 2-й главе (см., например, рисунок 2.7). Однако, у зависимостей, полученных здесь, есть важная характерная особенность: поскольку все выкладки, сделанные выше, справедливы только при соблюдении условия (3.8), то каждая такая функция $P(R_c)$ имеет ограниченную область определения при данном h_c.

По этой же причине ограниченную область определения имеют и графики функций $P(h_c)$ при каждом заданном R_c (рисунок 3.4, *б*). Обратим внимание еще на две важные особенности графиков $P(h_c)$. Во-первых, эти графики линейны, что прямо следует из уравнения (3.11). Во-вторых, они ярко иллюстрируют сказанное

в выводах по п. 3.1: при $h_c = h$, т.е. когда калотта совпадает со сводом обрушения, сила $P < 0$ (см. комментарий к формуле (3.6)).

а) *б*)

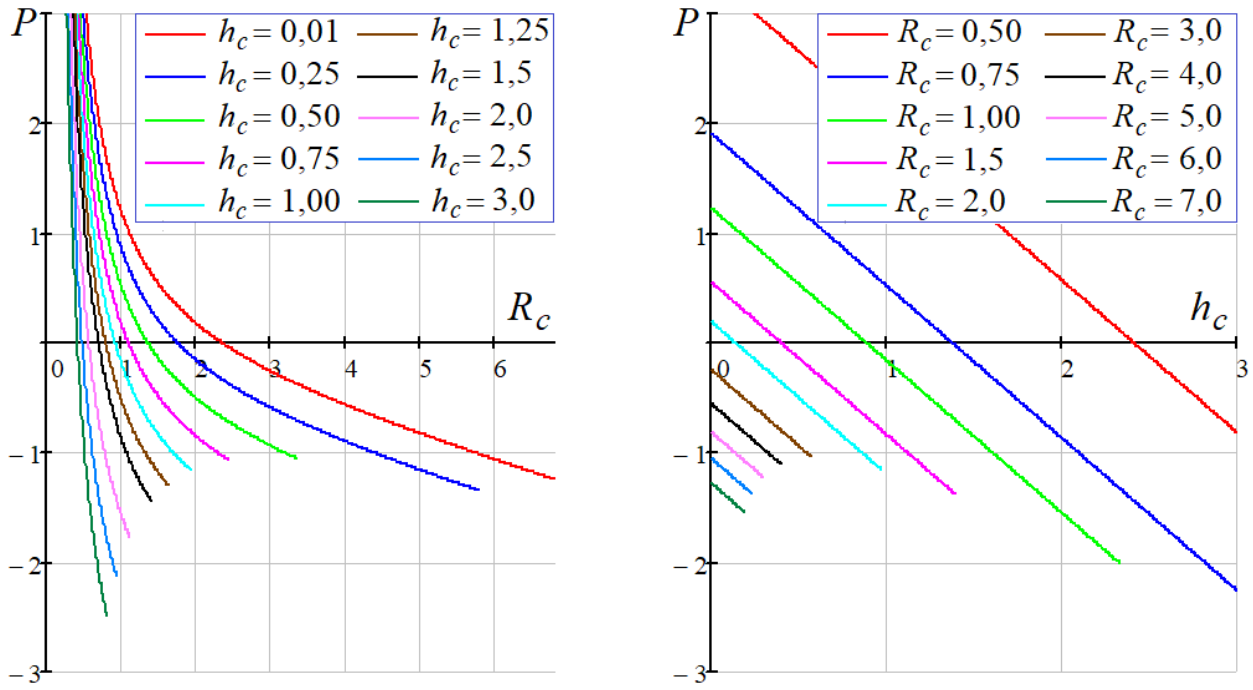


Рисунок 3.4 – Некоторые результаты решения для исходных данных (2.36*):
а – графики функций $P(R_c)$ при различных h_c; *б* – графики функций $P(h_c)$ при различных R_c

Из приведенных графиков также хорошо видно, что для некоторых R_c существуют такие h_c, при которых $P = 0$ (см. комментарий к формуле (3.7)). На графиках рисунка 3.4, *б*, – это линии от $R_c = 0{,}5$ до $R_c = 2{,}0$. В более прочных скальных грунтах (на рисунке 3.4, *б*, это линии с $R_c = 3$ и выше) имеем $P < 0$ даже при $h_c = 0$. В этом случае с появлением калотты сила P предельного давления только сильнее уходит в отрицательную область.

В приложении Г на рисунках Г.1…Г.20 показана трансформация графиков $P(R_c)$ и $P(h_c)$ при изменении параметра m. В качестве исходных данных примем R_t и C_0 в соответствии с (2.36*), а параметр m будем изменять от 0,10 до 1,0 шагом 0,05. Важно напомнить, что при этом меняется также и R_c, но соотношение R_t/C_0 остается всегда постоянным. Соответствующие графики кривых прочности обсуждались в п. 2.9 (см. также рисунок 2.9).

Эти графики показывают, что с увеличением m в большинстве случаев со-

кращается область определения функций $P(R_c)$ и $P(h_c)$. Однако, это не касается, например, графиков $P(R_c)$ при малых h_c: при $h_c = 0{,}01$ и при $h_c = 0{,}25$ графики область определения функции $P(R_c)$ увеличивается, а при $h_c = 0{,}50$ – сначала меняется незначительно, а затем, начиная примерно с $m = 0{,}5$, заметно сокращается.

Рассмотрим далее влияние параметра m на функцию $P(h_c)$. Сильнее влияние параметра m прослеживается при $R_c = 0{,}5\ldots3{,}0$: здесь сила P предельного давления заметно снижается по мере увеличения m. С другой стороны, поведение кривой $P(h_c)$ при $R_c = 5\ldots7$ зависит от m в гораздо меньшей степени и имеет качественно иной характер – в частности, область определения функции $P(h_c)$ незначительно, но растет с увеличением m.

Анализ зависимостей $P(R_c)$ и $P(h_c)$ при $h_c = h$. Приведем еще два графика, характеризующие силовое взаимодействие свода обрушения с окружающим массвом при устройстве калотты. Построим кривые, соединяющие концы графиков $P(R_c)$ при $m = 0{,}1\ldots1{,}0$. На рисунках Г.1…Г.20 эти графики показаны слева. Каждая точка на такой кривой даст силу P, рассчитанную для калотты высотой $h_c = h$ для данного значения R_c. Это означает параметрическое задание функции $P(R_c)$, где P вычисляется по формуле (3.11), а R_c выражается из равенства (3.9):

$$R_c = \left[\left(\frac{\gamma h}{0{,}1} \right)^m \frac{0{,}25}{\gamma a} \right]^{\frac{1}{m-1}}.$$

Данное выражение получено с учетом первых двух равенств (2.36*). Рассчитанные таким образом зависимости показаны на рисунке 3.5.

На рисунке 3.6 показаны графики еще одной зависимости: $P(h_c)$ при $h_c = h$, где h – высота свода обрушения, вычисляемая по формуле (3.9). Сила P так же рассчитывается по формуле (3.11) при $h_c = h$. Эти графики можно получить и как линии, которые соединяют конечные точки кривых $P(h_c)$, представленных на рисунках Г.1…Г.20 справа.

Кривые, изображенные на рисунке 3.5 и рисунке 3.6, являются линиями, ограничивающими область определения решений, полученных в рамках принятой расчетной схемы (рисунок 3.2). При этом они никоим образом не связаны с

наступлением состояния опасного с точки зрения безопасности. Напротив, как уже было сказано в п. 3.2, ситуация, когда выработка занимает всю площадь свода обрушения, имеем определенный запас, что и демонстрируют рассмотренные графики – они всюду находятся в отрицательной области $P < 0$. Очевидно, что ситуация $h_c > h + \delta$, где δ – малое число, не приведет к немедленному обрушению, однако повлечет изменения в самой схеме работы грунта – например, могут возникнуть риски образования боковых призм обрушения. Как уже говорилось, этот случай будет рассмотрен с практической точки зрения в 4-й главе.

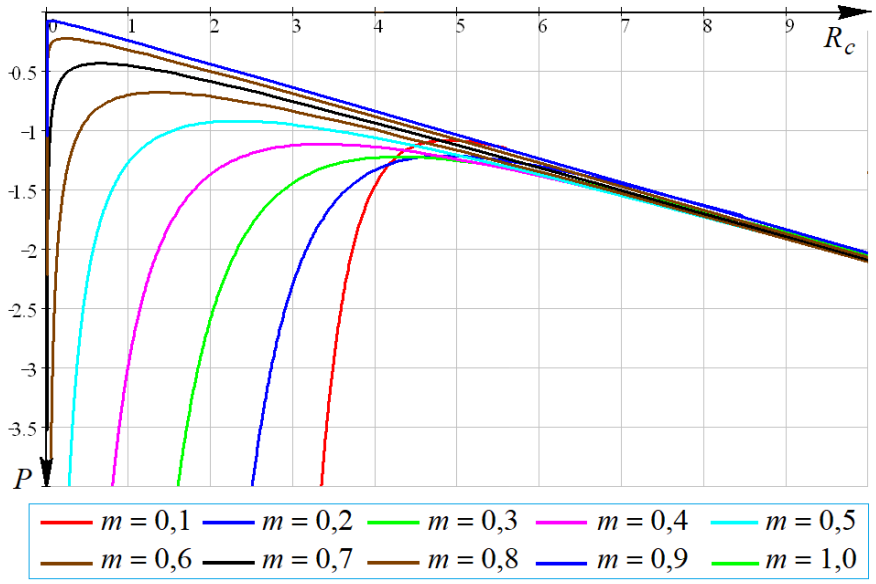


Рисунок 3.5 – Зависимости $P(R_c)$ для случая, когда калотта совпадает со сводом обрушения

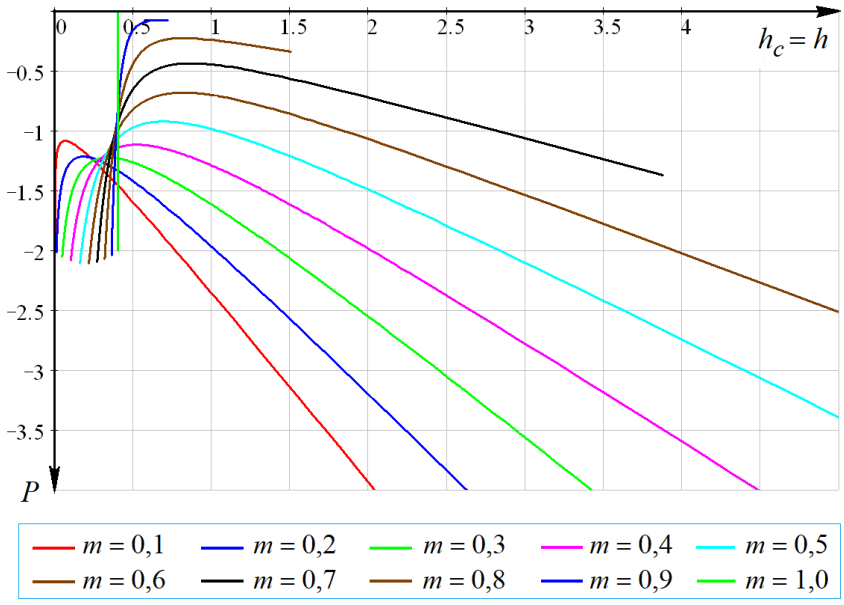


Рисунок 3.6 – Некоторые результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой

3.4. Постановка и решение задачи о своде обрушения над калоттой в дисперсных грунтах

Общие положения. Рассмотрим задачу о предельном давлении дисперсных грунтов на крепь калотты или постоянные конструкции каких-либо подземных сооружений криволинейного очертания.

Сразу оговорим четыре детали, важные с точки зрения «удобочитаемости» рассуждений, приводимых далее.

Первое. В отличие от решения для скальных грунтов здесь положительными считаются сжимающие напряжения.

Второе. Система координат в нижеследующих решениях – прямоугольная декартова *xOz*, у которой ось *Oz* направлена вертикально вниз.

Третье. Прочность дисперсных грунтов будем описывать условием прочности Кулона-Мора.

Четвертое. Как уже говорилось в п. 3.1, для решения этой задачи будет использован метод характеристик теории предельного равновесия (ТПР) грунтов.

Расчетная схема. Сама идея данного решения является развитием решения Я.О. Стахнёва для дисперсных грунтов. Я.О. Стахнёв установил принципиальное сходство между поведением грунта за подпорной стенкой и поведением грунта за крепью подземных сооружений. На этой основе Я.О. Стахнёв «повернул на 90°» расчетную схему ТПР для задачи о подпорной стенки и получил, таким образом, новое решение ТПР задачи о горном давлении в дисперсных грунтах.

Применительно к задаче о сводообразовании над калоттой эту схему вполне можно повторить [51]. Основное отличие будет состоять в очертании границы «свод обрушения – конструкция». У Я.О. Стахнёва эта граница была прямолинейна и горизонтальна, здесь – это криволинейная граница. Небольшое, казалось бы, изменение граничных условий, на самом деле, влечет за собой достаточно заметные усложнения в технике построения решения.

Не повторяя сказанного в главе 1 относительно уравнений и методов ТПР, сразу перейдем к расчетной схеме. На рисунке 3.7 представлена левая половина

симметричной расчетной схемы. На криволинейной границе *OC* располагается крепь сооружения или калотты. Ниже линии *OC* находится собственно подземное сооружение, выше – вмещающий его грунтовый массив. Линией *ABC*, которая заранее неизвестна и определится только в результате решения, ограничен предполагаемый контур свода обрушения.

На этой же схеме указаны номера краевых задач, в рамках которых будет осуществляться численной интегрирование канонической системы уравнений (1.35) статики сыпучей среды.

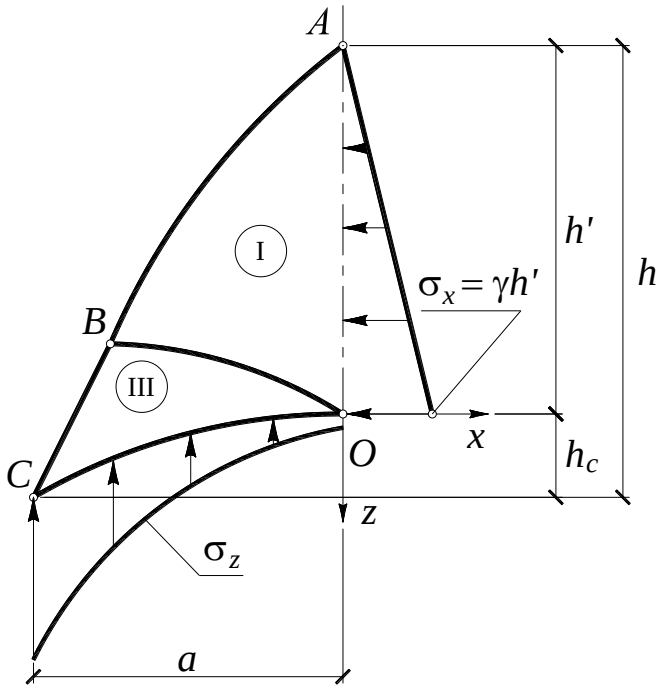


Рисунок 3.7 – Расчетная схема к решению задачи устойчивости свода над криволинейным очертанием подземного сооружения ТПРГ

Данное решение строится с применением только двух краевых задач: в зоне *OAB* решается первая краевая задача и в зоне *OBC* – третья. Первая краевая задача решается аналогично тому, как это было сделано в работе Я.О. Стахнёва. А интегрирование в зоне *OBC* потребует некоторых комментариев – они будут даны чуть ниже.

В завершение рассмотрения расчетной схемы сделаем два замечания.

Первое. Обратим внимание на то, что вершина свода обрушения – точка *A* – это точка перелома контура свода обрушения, в то время как в скальных грунтах

контур свода обрушения предполагался гладкой функцией. Указанное различие сводообразования в скальных и дисперсных грунтах имеет экспериментальное подтверждение, а в описываемые здесь решения дадут этому дополнительное теоретическое обоснование.

Второе. Кратко прокомментируем первоначальную идею о «повороте на 90°». Если повернуть рассматриваемую расчетную схему на 90° против часовой стрелки, то линия *OA* станет горизонтальной границей засыпки грунта за стенкой, а линия *OC* станет криволинейной границей подпорной стенкой.

Граничные условия. Специальный вопрос, который возникает при построении данного решения – это граничные условия по линии *OA*. К определению граничных условий можно подойти двояко. Первый путь – определять напряженное состояние от дневной поверхности грунта. Второй путь – принять гипотезу о том, что в момент разрушения свод уже как бы отделяется от выше лежащего грунта, и напряженное состояние внутри свода определяется только его размерами и не зависит от глубины заложения подземного сооружения.

Для ответа на этот вопрос воспользуемся результатами, полученными Я.О. Стахнёвым [116]. Он исследовал эту проблему и пришел к обоснованному выводу о том, что корректным является второй путь. Следовательно, по границе *OA* зададим треугольную эпюру бокового давления σ_x, т.е. без учета полной глубины заложения подземной конструкции, – так, как это показано на рисунке 3.7.

Таким образом, решение будет строиться с границы *OA* до границы *OC*, на которой главной искомой величиной будут вертикальные напряжения σ_z. Добавим, что граница *OC* принимается гладкой.

Решение I краевой задачи в области *OAB*. Это решение осуществляется при известных параметрах канонической системы уравнений на границе *OA*:

$$x = 0; \qquad z \in [-h', 0]; \qquad \alpha = -\frac{\pi}{2}; \qquad \sigma = \frac{\sigma_x + c\,\mathrm{ctg}\,\varphi}{1 + \sin\varphi}, \qquad (3.12)$$

где $\sigma_x = \gamma(h' + z)$ – боковые напряжения на *OA*.

Формулу для среднего приведенного напряжения σ получают следующим образом: в условии прочности Кулона-Мора, записанном в главных напряжениях,

принимают $\sigma_1 = \sigma_x$, затем из него выражают σ_3, после чего приходят к выражению для σ.

Кратко опишем основные этапы построения конечно-разностной сетки характеристик (линий скольжения) в данной области.

Как уже говорилось, в методе характеристик решение осуществляется путем интегрирования – чаще всего, численного – канонических уравнений. Расписанные в конечных разностях канонические уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
(x - x_1) &= (z - z_1) \cdot \operatorname{tg}(\tilde{\alpha}_1 + \mu), \\
(x - x_2) &= (z - z_2) \cdot \operatorname{tg}(\tilde{\alpha}_2 - \mu), \\
(\sigma - \sigma_1) + 2\tilde{\sigma}_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot (\alpha - \alpha_1) &= \gamma[z - z_1 - (x - x_1) \cdot \operatorname{tg}\varphi], \\
(\sigma - \sigma_2) - 2\tilde{\sigma}_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot (\alpha - \alpha_2) &= \gamma[z - z_2 + (x - x_2) \cdot \operatorname{tg}\varphi].
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Рассмотрим два малых отрезка характеристик (линий скольжения). На отрезке характеристики 1-го семейства известна точка *1*, на отрезке характеристики 2-го семейства известна точка *2*. Другими словами, в точках *1* и *2*, расположенных достаточно близко друг к другу, известны все параметры канонической системы уравнений, соответственно, x_1, z_1, α_1, σ_1 и x_2, z_2, α_2, σ_2. Требуется определить все параметры x, z, α, σ канонических уравнений в искомой точке *M*, расположенной на пересечении характеристик 1-го и 2-го семейств, проходящих через известные точки *1* и *2* (рисунок 3.8) [45].

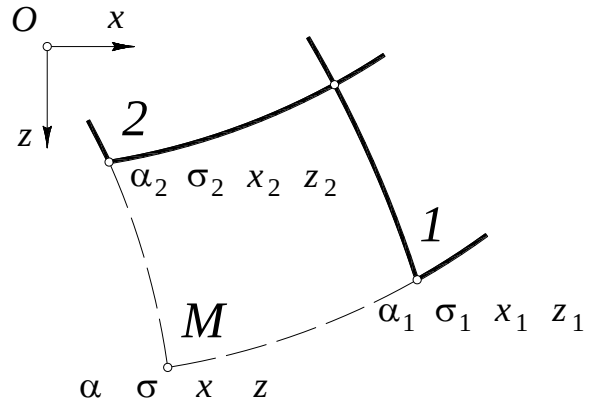


Рисунок 3.8 – Схема к численному интегрированию канонических уравнений

Искомые параметры выражаются из приведенных выше конечно-

разностных зависимостей:

$$z = \frac{x_1 - x_2 - z_1 \mathrm{tg}(\tilde{\alpha}_1 + \mu) + z_2 \mathrm{tg}(\tilde{\alpha}_2 - \mu)}{\mathrm{tg}(\tilde{\alpha}_2 - \mu) - \mathrm{tg}(\tilde{\alpha}_1 + \mu)}; \qquad x = (z - z_1)\mathrm{tg}(\tilde{\alpha}_1 + \mu) + x_1;$$

$$\alpha = \frac{\gamma[-z_1 + z_2 - (x - x_1)\mathrm{tg}\,\varphi - (x - x_2)\mathrm{tg}\,\varphi] + \sigma_1 - \sigma_2 + 2\,\mathrm{tg}\,\varphi(\tilde{\sigma}_1\alpha_1 + \tilde{\sigma}_2\alpha_2)}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2)}; \qquad (3.14)$$

$$\sigma = \sigma_1 - 2\tilde{\sigma}_1 \mathrm{tg}\,\varphi(\alpha - \alpha_1) + \gamma[z - z_1 - (x - x_1)\mathrm{tg}\,\varphi].$$

Величины, обозначенные «волной», требуют особого внимания, так как находятся в определенном интервале значений: например, величина $\tilde{\alpha}_1$ находится в интервале $[\alpha, \alpha_1]$ и т.д. Поэтому вычисления по каждой искомой точке приходится вести итерационным методом. На первой итерации принимается:

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1, \qquad \tilde{\sigma}_1 = \sigma_1, \qquad \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2, \qquad \tilde{\sigma}_2 = \sigma_2,$$

а на последующих —

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\alpha + \alpha_1}{2}, \qquad \tilde{\alpha}_2 = \frac{\alpha + \alpha_2}{2}, \qquad \tilde{\sigma}_1 = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}, \qquad \tilde{\sigma}_2 = \frac{\sigma + \sigma_2}{2}.$$

Как показывает практика вычислений, обычно хватает 3…5 итераций.

В результате такого решения в каждой точке конечно-разностной сетки характеристик в пределах области *OAB* будут определены все параметры канонической системы уравнений: *x*, *z*, α, σ [116].

Решение III краевой задачи в области *OBC*. Это решение осуществляется при известных параметрах канонической системы уравнений на характеристике *OB*, которые вычислены в результате решения в области *OAB*, и известном уравнении границы *OC*, на которой, напомним, отсутствуют касательные напряжения.

Особенность вычислений в рамках III краевой задачи состоит в том, что параметры *x*, *z*, α, σ канонических уравнений рассчитываются по приведенному выше алгоритму за исключением тех точек, которые непосредственно находятся на границе *OC*. Поскольку этот элемент решения содержит определенную новизну, остановимся на его описании подробнее.

Граница *OC* – это контур калотты или подземного сооружения. Уравнение этого контура примем по окружности:

$$x^2 + (z - R_c)^2 = R_c^2, \qquad (3.15)$$

где R_c – радиус окружности.

Отсутствие трения на контакте «свод обрушения – крепь калотты» означает, что в каждой точке границы *OC* напряжения σ_1 будут направлены по касательной к этой кривой. Это требование формализуется с помощью параметра α, для которого можем записать:

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{dz}{dx} \qquad \text{или} \qquad \alpha = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{R_c^2 - x^2}}. \qquad (3.16)$$

Наконец, обратимся к каноническим уравнениям, которые для вычисления точек на границе *OC* примут вид:

$$(x - x_1) = (z - z_1)\cdot \operatorname{tg}(\tilde{\alpha}_1 + \mu); \qquad (3.17)$$

$$(\sigma - \sigma_1) + 2\sigma_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot (\alpha - \alpha_1) = \gamma[(z - z_1) - (x - x_1)\cdot \operatorname{tg}\varphi].$$

Сравнивая уравнение (3.15) и первое из уравнений (3.17), имеем

$$R_c - \sqrt{R_c^2 - x^2} = (x - x_1)\cdot \operatorname{ctg}(\tilde{\alpha}_1 + \mu) + z_1,$$

откуда находится *x*.

Вычислим, далее, из (3.16) параметр α, а затем определим среднее приведенное напряжение из второго из уравнений (3.17):

$$\sigma = \sigma_1 - 2\sigma_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot (\alpha - \alpha_1) + \gamma[(z - z_1) - (x - x_1)\cdot \operatorname{tg}\varphi].$$

На последнем этапе, зная в каждой точке границы *OC* все параметры канонических уравнений, рассчитаем напряжения σ_x, σ_z, τ_{xz} по формулам (1.36). В дополнение к этому можно рассчитать главные напряжения:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}\ .$$

Равнодействующую *P* вертикального давления грунта на крепь калотты (или на криволинейную конструкцию подземного сооружения) в дисперсных грунтах найдем из равенства:

$$\frac{1}{2}P = \int_{-a}^{0} \sigma_3 dx.$$

Еще о технических особенностях построения решения. Длина самого отрезка *OA*, обозначенная как h', заранее неизвестна. Она будет определяться в результате решения. Дело в том, что в точке *A* напряжения $\sigma_x = 0$. При этом линия скольжения *ABC*, определяемая в результате решения, должна прийти в точку *C*, для которой $x = -a$.

Поскольку технически расчеты удобно вести при заданном a (полупролет свода обрушения), то приходим к необходимости осуществления итерационной процедуры подбора такой величины h', которая позволила бы в результате решения прийти в точку $C(-a, h_c)$ с требуемой точностью.

Далее, поскольку, как сказано, точка *C* определяется в результате решения, то и высота h_c калотты, следовательно, станет известна только в конце расчета, а не задана перед его началом. Это, в свою очередь, означает, что для того, чтобы «выйти» на калотту требуемой высоты h_c и с требуемой полуширины a, необходимо в исходных данных подбирать соответствующие R_c и h'.

3.5. Некоторые результаты решения задачи о своде обрушения над калоттой в дисперсных грунтах

Анализ результатов, как и ранее, будем осуществлять в относительных переменных: $\gamma = 1$ и $a = 1$. В этом случае, напомним, γa – единица напряжений; γa^3 – единица силы и т.д.

Сетки линий скольжения (характеристик) и эпюры напряжений. На рисунке 3.9 показано два примера сетки линий скольжения (характеристик), рассчитанные для двух достаточно случайных набора исходных данных. Там же приведены эпюры горизонтального σ_x, вертикального σ_z напряжений, а также третьего главного напряжения σ_3.

Для сетки, показанной на рисунке 3.9, *а*, получено: высота калотты $h_c = 0{,}382$, вертикальная сила предельного давления $P = 0{,}533$.

Для сетки, показанной на рисунке 3.9, *б*, получено: высота калотты

$h_c = 0{,}277$, вертикальная сила предельного давления $P = 0{,}0207$ [68].

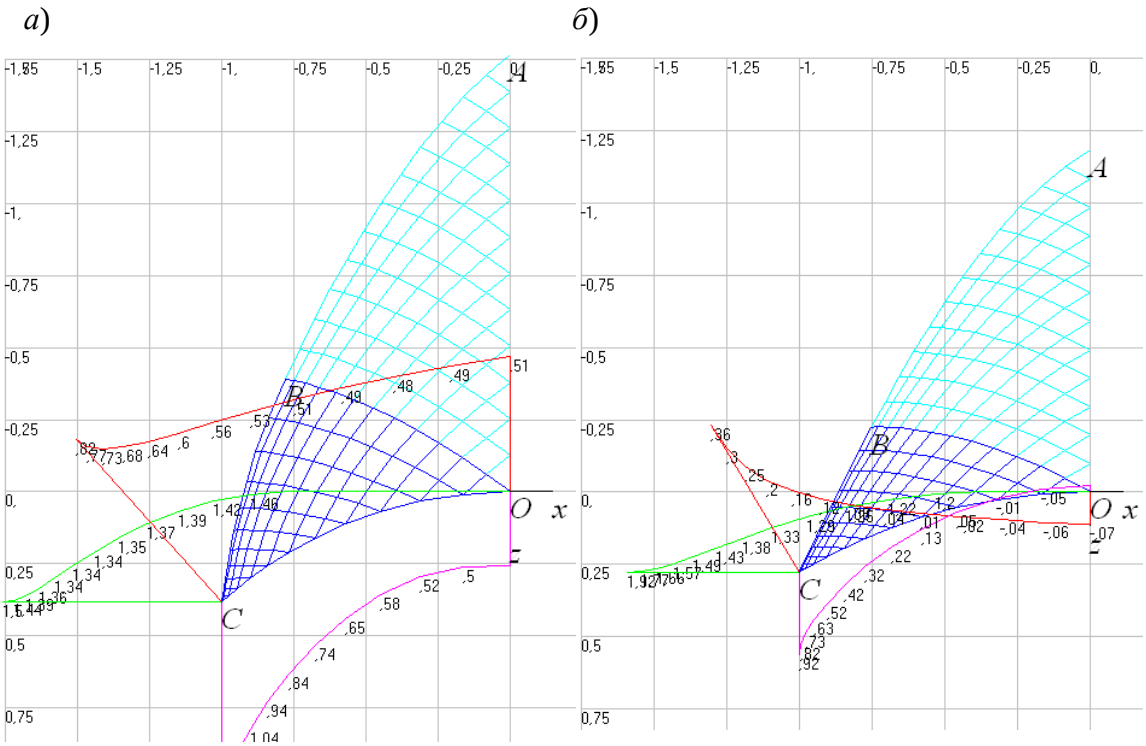


Рисунок 3.9 – Сетки линий скольжения и эпюры напряжений σ_x (зеленая линия), σ_z (бордовая линия), σ_3 (красная линия) для следующих исходных данных [68]:
а — $\gamma = 1$, $a = 1$, $\varphi = 15°$, $c = 0{,}25$, $R_c = 1.50$, $h' = 1{,}515$;
б — $\gamma = 1$, $a = 1$, $\varphi = 30°$, $c = 0{,}40$, $R_c = 1.95$, $h' = 1{,}181$

В обоих случаях получен свод обрушения стрельчатого очертания. Данный результат, вообще говоря, был вполне предсказуем, поскольку при принятой компоновке краевых задач (см. рисунок 3.7), угол наклона крайней линии, выходящей из точки *A*, к горизонтали равен $\pi/4 - \varphi/2$ (см. рисунок 3.7). Эта особенность сетки линий скольжения «унаследована» от базовых решений – решения Я.О. Стахнёва [116] и классического решения задачи о давлении грунта на подпорную стенку [45]. Скажем несколько слов о характере распределения напряжений на границе *OC*.

Эпюра вертикальных напряжений σ_z в примере, показанном на рисунке 3.9, *а*, полностью положительна – т.е. свод стремится обрушиться, и его необходимо удерживать по всей границе *OC*. Во втором примере (см. рисунок 3.9, *б*) эпюра σ_z знакопеременная. Причем сжатие происходит у края выработки, а в центре для

наступления предельного состояния даже требуется некоторое растягивающее напряжение.

Подобные результаты были получены и Я.О. Стахнёвым, обсуждались им и обосновывались сравнением с расчетами, выполняемыми по модели дискретных сред [116].

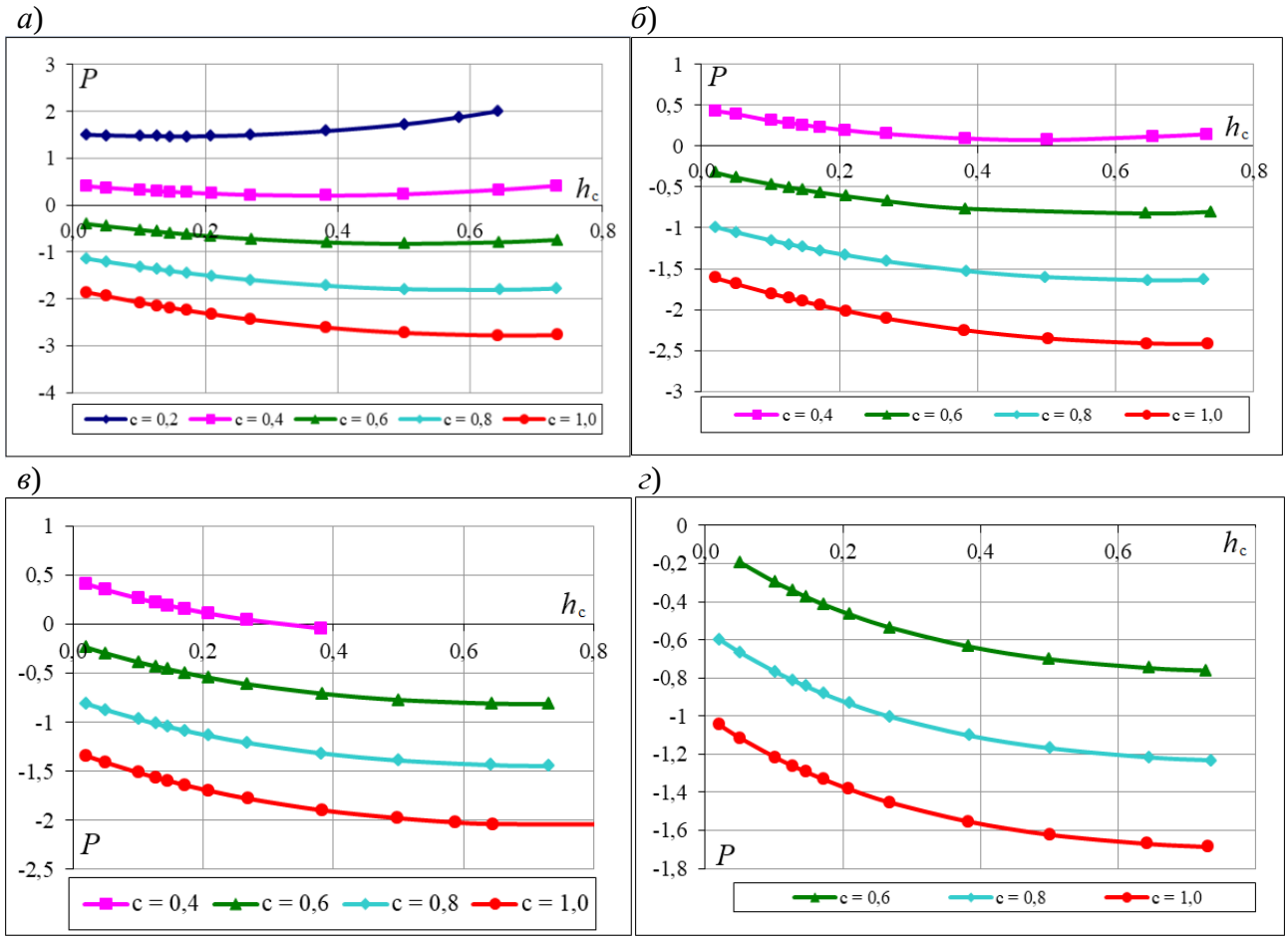


Рисунок 3.10 – Зависимости силы предельного давления P от высоты $h_к$ калотты [68] для φ = 10° (*а*); φ = 20° (*б*); φ = 30° (*в*); φ = 40° (*г*)

Анализ зависимостей $P(h_c)$, $p(h_c)$ и $h'(h_c)$. На рисунке 3.10 приведены графики зависимостей равнодействующей силы P вертикального предельного давления от высоты h_c криволинейной подземной конструкции для разных углов внутреннего трения φ и различных относительных величин c удельного сцепления [68].

Из графиков видно, что с увеличением высоты h_c калотты предельная нагрузка P падает, но не всегда. Например, при малых углах внутреннего трения (φ = 10°, c = 0,2 – см. рисунок 3.10, *а*) предельная нагрузка с увеличением калотты

несколько увеличивается.

Далее проанализируем зависимости среднего значения вертикального давления p от высоты h_c калотты для разных углов внутреннего φ и различных относительных величин c удельного сцепления (рисунок 3.11). Среднее значение p вычислялось по формуле:

$$p = \frac{P}{s \times 1},$$

где s – длина контура калотты, равная удвоенной длине границы OC.

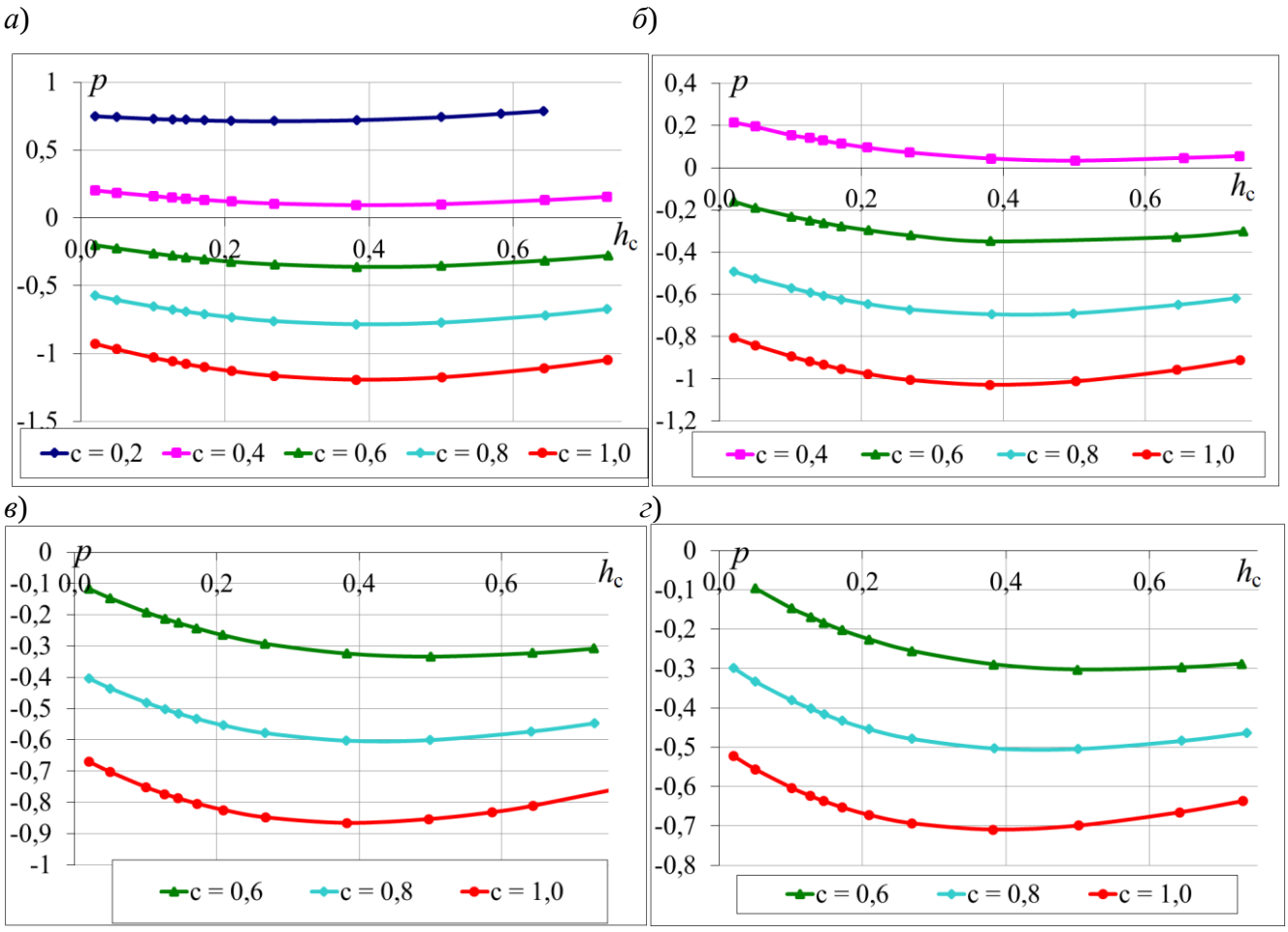


Рисунок 3.11 – Зависимости давления p от h_c для φ = 10° (*а*); φ = 20° (*б*); φ = 30° (*в*); φ = 40° (*г*)

Из представленных графиков видно, что при увеличении высоты калотты давление сначала ожидаемо падает, а потом несколько увеличивается. И это прослеживается практически для всех значений исходных данных.

В завершение разговора о предельном давлении на крепь калотты в дисперсных грунтах, проанализируем зависимости высоты h' от высоты h_c калотты

для разных углов внутреннего трения φ и различных относительных величин *c* удельного сцепления. Сразу оговоримся, что речь идет не о полной высоте свода обрушения *h*, а об отрезке длиной *h′* над калоттой (см. рисунок 3.7). Итак, интересующие нас графики показаны на рисунке 3.12. Здесь наблюдается ситуация, схожая с тем, что было с графиками $p(h_c)$. Для малых углов внутреннего трения φ = 10°...20° с увеличением высоты калотты увеличивается высота свода обрушения. А для больших углов внутреннего трения φ = 30°...40° с увеличением высоты калотты высоты свода сначала падают до какого-то критического значения, а после – начинают возрастать.

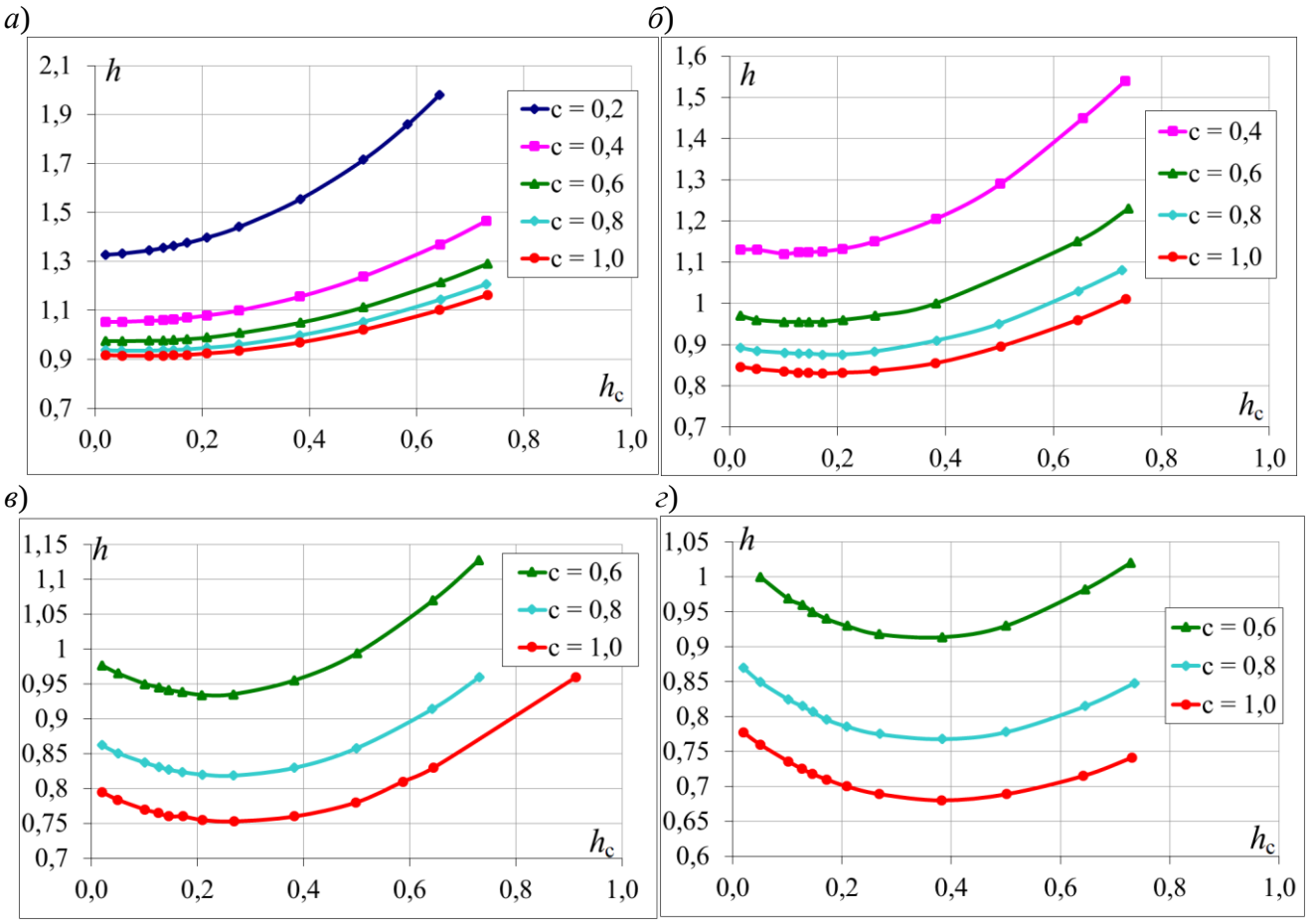


Рисунок 3.12 – Зависимости высоты *h′* от h_c для φ = 10° (*а*); φ = 20° (*б*); φ = 30° (*в*); φ = 40° (*г*)

Таким образом, существует два характерных значения высоты калотты. Одному из них будет соответствовать минимум предельного давления грунта на крепь. Другому – минимум высоты свода обрушения. Существование таких минимумов и соответствующих им характерных (критических) значений h_c может быть учтено в реальном проектировании с целью получения экономического эффекта и повышения безопасности.

Выводы по главе 3

1. Предлагается к рассмотрению тип подземных сооружений, у которых ширина значительно превышает высоту. Частным случаем таких сооружений является калотта. Для этого типа сооружений адаптирована расчетная схема Риттера-Стахнёва. Получено решение задачи о сводообразовании над криволинейной подземной конструкцией в скальных грунтах как задачи вариационного исчисления.

2. Установлено, что в скальных грунтах очертание свода обрушения и распределение нормальных напряжений по контуру не зависят от высоты калотты (криволинейного подземного сооружения) при условии, что вся конструкция находится «внутри» свода обрушения. От очертания криволинейного подземного сооружения зависит лишь величина силы предельного давления свода на конструкции сооружения. Установлен ряд закономерностей влияния предельной высоты калотты (то есть равной своду обрушения), на величину предельной нагрузки. Этот анализ выполнен для различных видов огибающей предельных кругов Мора, т.е. для грунтов с различным типом прочности.

3. Сформулирована и решена задача о сводообразовании над криволинейными конструкциями в дисперсных грунтах. Решение получено методом характеристик ТПР. Установлено, что результаты формирования свода обрушения в дисперсных и скальных грунтах имеют качественные отличия. В частности, с увеличением высоты калотты в дисперсных грунтах увеличивается и высота свода обрушения. Одновременно увеличиваются и общие размеры свода. Выявлено, что зависимости равнодействующей предельного давления, его среднего значения и высоты свода обрушения от высоты калотты носят сложный характер. В частности, в ряде случаев эти функции немонотонны и имеют экстремум.

ГЛАВА 4. ПРАКТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА И ЕЕ ОБОСНОВАНИЕ

4.1. Общие положения и структура главы

Главная цель данной главы – разработка и обоснование практической методики расчета вертикальной нагрузки от горного давления на криволинейные конструкции подземных сооружений. Эта методика будет реализована в рамках теории сводообразования М.М. Протодьяконова. Скальные и дисперсные грунты будут рассматриваться отдельно. Основой предлагаемых в данной главе алгоритмов и методик являются решения, полученные в предыдущих двух главах.

Прежде чем, перейти к основному содержанию данной главы, необходимо сделать несколько предварительных замечаний.

Описанные далее практические методики касаются расчетных схем, давно известных в тоннелестроении. По этим схемам построено огромное количество сооружений, накоплен весьма обширный опыт проектирования и строительства. В том числе опубликованы и результаты многочисленных исследований по горному давлению. Эти исследования имеют как экспериментальный, так и теоретический характер. Поэтому, доводя полученные теоретические результаты до конечных практических формул, таблиц и графиков, автором сделаны соответствующие поправки, сближающие известные фактические данные с полученными теоретическими результатами.

Численные решения, и об этом уже шла речь в 1-й главе, стоят особняком в научных изысканиях по подземному строительству. Они доказали свою чрезвычайную эффективность – это общеизвестно. Без преувеличения можно сказать, что последнюю четверть века численные методы буквально царят в практике расчетов и проектирования подземного строительства. Тем самым развернулась широкомасштабная апробация численных методов применительно к самым различным геотехническим задачам.

Однако этот процесс далек от завершения. В большом количестве случаев

численные методы не позволяют получить параметры напряженно-деформированного состояния с точностью, достаточной для практических нужд. В ряде случаев результаты численных расчетов прямо противоречат имеющимся представлениям о поведении горных массивов и подземных сооружений. Например, подобные ситуации часто фиксируются при использовании метода конечных элементов для задач о предельном напряженном состоянии грунтовых массивов [40].

Таким образом, возникает самостоятельная и очень крупная задача дальнейшей апробации численных методов, установления границ их применимости и их корректной адаптации к задачам подземного строительства.

Прямой путь решения этой проблемы – экспериментальные исследования. Но только к экспериментам решение этой проблемы не сводится по понятным причинам – трудоемкость, продолжительность во времени, экономические соображения. Поэтому остается актуальным и другой, столь же хорошо известный способ решения – это выявление новых закономерностей и их теоретическое оформление в механике грунтов, механике подземных сооружений, механике скальных пород.

Заметим, что придание этим закономерностям вида замкнутых аналитических формул – это не только большая научно-исследовательская удача, которая ценна исключительно своей теоретической красотой и изяществом.

Замкнутые формулы позволяют оптимизировать процесс верификации численных решений, выявить узкие места в решениях, направить совершенствование того или иного численного метода по максимально короткому пути.

Самое важное здесь – это максимально наглядное и удобное для инженерного дела и инженерной практики выявление степени влияния тех или иных факторов на исследуемое явление.

Кстати говоря, оформить некую аналитическую зависимость можно и с помощью численных решений, если, конечно, до этого уже установлена их корректность применительно к данному классу задач. И дело даже не в том, что для этого придется выполнить большой объем вычислений. Дело в том, что, аппроксимиро-

вав численные результаты какой-либо формулой, на второй план неизбежно уйдет физика явления, которая всегда стоит во главе угла для любой инженерной задачи. Сам процесс классического вывода формул базируется на некоторых предпосылках и гипотезах, которые вытекают из анализа и понимания физической сути явления.

Наконец, сами аналитические зависимости, в свою очередь, могут быть положены в основу разработки следующего поколения численных решений.

Все сказанное определило следующую структуру данной главы:

1) сопоставление результатов теоретических решений с численным решениями и выводы по результатам этих сопоставлений [49];

2) сопоставление с данными, опубликованными в открытой печати другими авторами, относительно замеров напряжений в подземных конструкциях на достаточно крупных объектах;

3) сопоставление с теми нормативными методиками расчета подземных сооружений, которые прошли апробацию на протяжении многих десятилетий и по которым построено множество подземных объектов;

4) разработка практических рекомендаций на основе полученных автором теоретических результатов с учетом существующей практики проектирования, строительства и эксплуатации подземных сооружений.

Специфика настоящего исследования состоит в том, что рассматривается задача, которая, повторимся, известна уже очень давно. По сути, это – основная задача тоннеле- и метростроения и в целом подземного строительства. Естественно, что накопленный гигантский опыт практического строительства нашел отражение в нормативных документах уже тоже достаточно давно – как минимум, с момента выхода в свет СНиП II-Д.8-62 [101], где непосредственно приведена шкала крепости грунтов по М.М. Протодьяконову, и даже с 1954 года, когда вышел «СНиП. Часть II. Нормы строительного проектирования», глава 9 «Тоннели» [100]. К слову, в СНиП 1954 года не приводится прямо сама шкала крепости, но схема Протодьяконова-Цимбаревича дается практически в том же виде, в каком она присутствует и в современных СП 120 и 122 [109, 111], за исключением неко-

торых буквенных обозначений.

Сказанное означает, что, начиная с 1962 года, в нашей стране проектировщики были обязаны рассчитывать давление на тоннельные сооружения по схеме Протодьяконова–Цимбаревича и по шкале М.М. Протодьяконова. Исключение составляют случаи, предусмотренные и прежними СНиП, и современными СП пространной формулировкой: «*Величину горного давления на тоннельную обделку определяют на основании опыта строительства в аналогичных инженерно-геологических условиях*» [101].

Таким образом, сам подход – схема сводообразования в сочетании с числовыми параметрами шкалы М.М. Протодьяконова – не просто нельзя игнорировать, но на него следует ориентироваться как на своего рода метаэксперимент. Собственно, эта же мысль была сформулирована и Я.О. Стахнёвым [116], и здесь мы с ним полностью солидаризируемся.

4.2. Сопоставление с численными решениями

Условия прочности для скальных грунтов. Общие сведения об используемых численных методах приводятся в первой главе. В нижеприводимых расчетах МКЭ будем решать идеально-упругопластическую задачу, а МПА – жесткопластическую. В программных комплексах, в которых будут реализованы численные решения, в качестве условия прочности принята функция текучести *Hoek-Brown* для скальных грунтов – см. ф-лу (1.17). Поскольку в аналитических решениях, полученных в данной работе, принималось иное условие прочности, а именно функция (2.6) (в первой главе – ф-ла (1.24)), то первым делом необходимо подобрать такие параметры для каждой из функций, которые обеспечивали бы их совпадение при отображении на ту или иную координатную плоскость.

Для условия прочности (2.6) были приняты следующие параметры:

$$R_t = -0{,}18 \cdot R_c\,, \qquad C_0 = -0{,}24 \cdot R_c\,, \qquad m = 0{,}65\,. \tag{4.1}$$

Прочностные параметры a, m_b и s из условия текучести *Hoek-Brown* (1.17) подбирались через вспомогательные величины: геологический коэффициент

прочности *GSI*, коэффициент m_i, обычно именуемый параметром свойств материала ненарушенной скалы, и коэффициент *D* «нарушенности» скального грунта.

Это связано с тем, что именно эти величины непосредственно требуется вводить в ПК *Optum G*2 и в ПК *PLAXIS* 2*D*.

Приняв указанные величины равными *GSI* = 99,05, m_i = 5,173, *D* = 0, по формулам (1.18) получим

$$a = 0{,}5, \qquad m_b = 4{,}997, \qquad s = 0{,}8998. \qquad (4.2)$$

Графики $\sigma_1(\sigma_3)$, построенные по прочностным параметрам (4.1) условия прочности (2.6) и по прочностным параметрам (4.2) условия прочности (2.50), представлены на рисунке 4.1, *а*.

Схема для численных расчетов. На рисунке 4.1, *б*, показана расчетная схема к численным решениям. Размеры схемы подбирались так, чтобы они не влияли на результаты расчета. После некоторых приближений было установлено, что достаточно принять ширину расчетной схемы равной 20*l*, где *l* – пролет свода обрушения, а высоту – равной 10*l*. Собственно, такие же размеры расчетной области принимались, когда выполнялось сопоставление с численными решениями в главе 2, и такие же размеры принимались Я.О. Стахнёвым для аналогичных расчетных схем [116]. В некоторых расчетах для повышения производительности и сокращения времени вычислений принималась только одна, правая половина, симметричной расчетной схемы. В этом случае высота расчетной схемы оставлялась такой же – 10*l*, а ширина половины расчетной схемы – 12*l*, т.е. общая ширина получалась бы даже больше – 24*l*.

По нижней границе прямоугольной расчетной области в центре посередине расположен незакрепленный участок криволинейного очертания, моделирующий калотту или очертание верхней криволинейной конструкции подземного сооружения. На рисунке 3.1 и рисунке 3.2 этому участку соответствует отрезок *OL*. Длина этого участка при численном моделировании $l = 2a = 2$. Высота калотты обозначена, как и ранее, через h_c.

Соответственно, ставится задача определения равнодействующей *P* предельного вертикального давления *p* на участке $l = 2$.

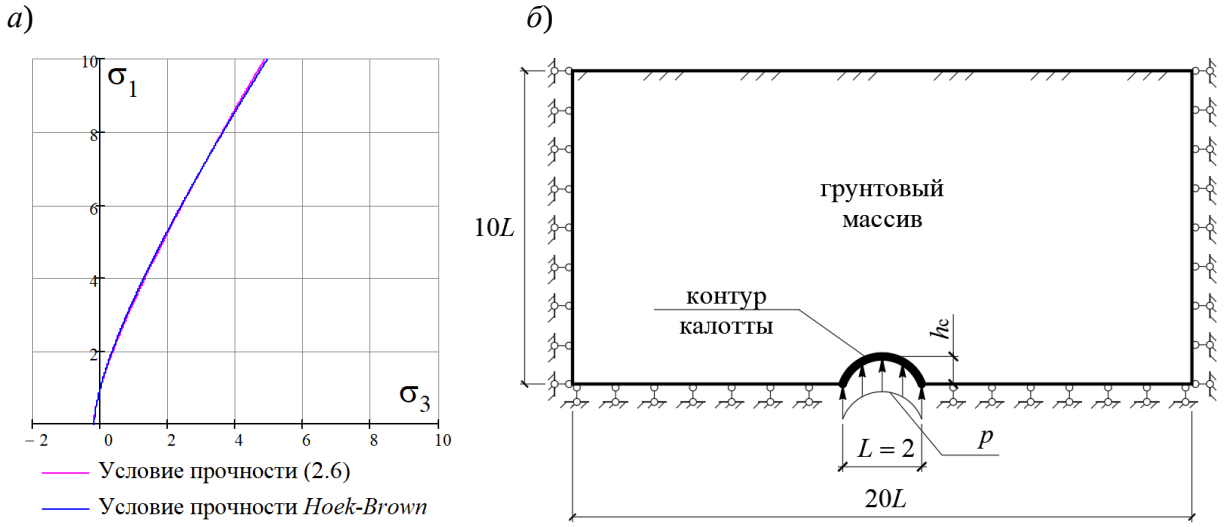


Рисунок 4.1 – К построению численных решений: *а* – функции текучести (2.6) с параметрами (4.1) и функции текучести *Hoek-Brown* (1.17) с параметрами (4.2) в плоскости $\sigma_3 O \sigma_1$; *б* – расчетная схема к численным решениям по МПА и МКЭ

На начальном этапе расчетов и в МКЭ, и в МПА на участке $l = 2$ прикладывалась нагрузка, равная

$$p = \gamma H ,$$

где H – высота расчетной схемы.

В МПА вычисляется такое значение p, меньше которого существование уравновешенного поля напряжений уже невозможно, если на напряжения ограничены поверхностью текучести [116, 163].

В МКЭ давление p уменьшалось до тех пор, пока существует решение по критериям сходимости, заложенным в ПК. Давление на последнем шаге расчета – это и есть искомое давление.

И в МПА, и в МКЭ при достаточно больших значениях R_c решение могло существовать и при $p = 0$. Тогда давление p «уходило» в отрицательную область опять же до тех пор, пока решение существует.

Результаты сопоставления для скальных грунтов. На рисунке 4.2 показано сопоставление зависимостей $P(R_c)$, рассчитанных тремя способами:

– линия «Эйлер» представляет результаты аналитического расчета по формуле (3.3);

– линия «МПА» представляет результаты численного расчета методом предельного анализа, реализованным в ПК Optum G2;

– линия «МКЭ» представляет результаты численного расчета методом конечных элементов, реализованным в ПК PLAXIS 2D.

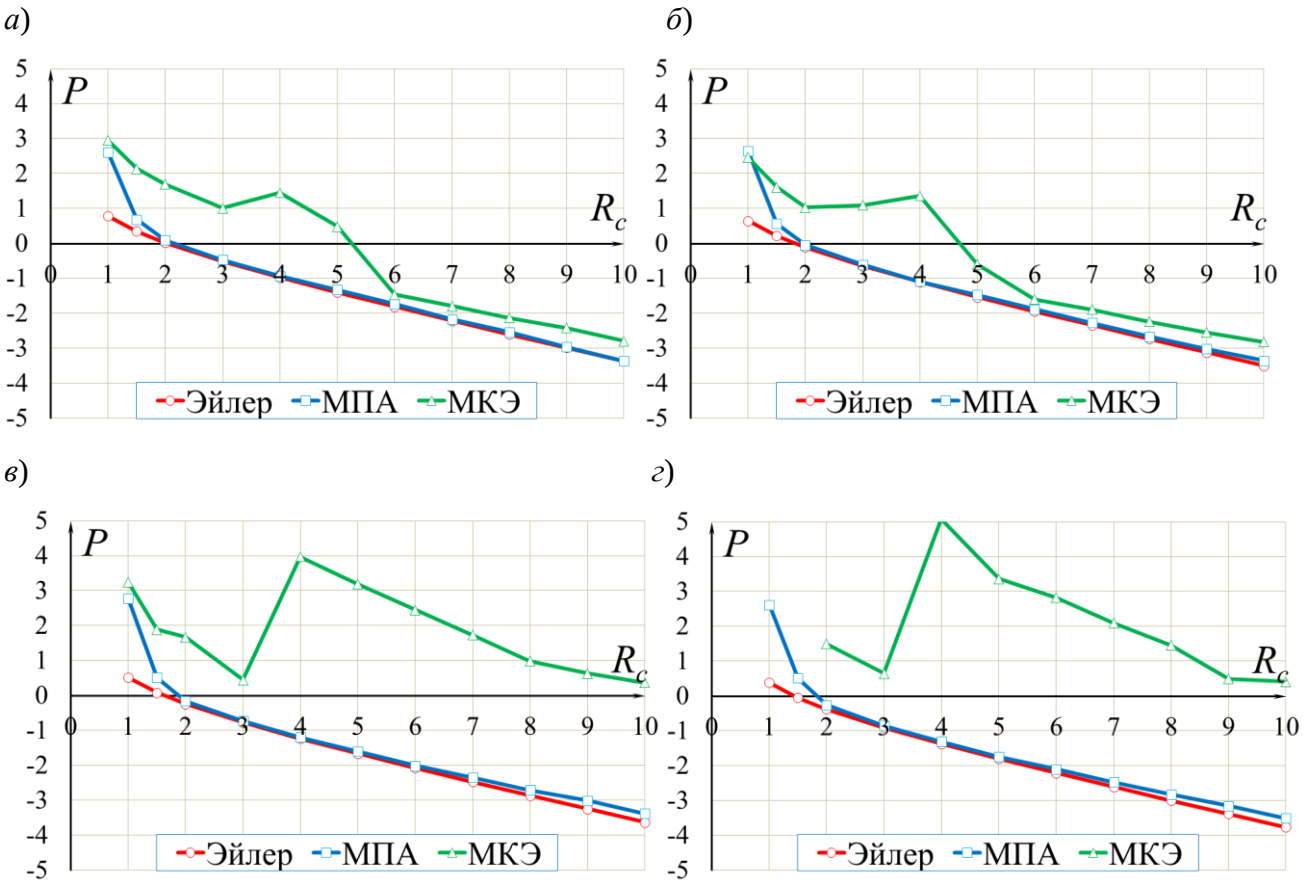


Рисунок 4.2 – Сопоставление значений $P(R_c)$, рассчитанных по аналитическому решению (линия «Эйлер»), по МПА и по МКЭ при $h_c = 0{,}1$ (*а*), $h_c = 0{,}2$ (*б*), $h_c = 0{,}3$ (*в*), $h_c = 0{,}4$ (*г*)

Как следует из представленных графиков, теоретические оценки и значения, полученные методом предельного анализа, неплохо согласуются между собой, однако при малых значениях прочности грунта на одноосное сжатие ($R_c < 2$) расхождение увеличивается. Этот эффект уже был зафиксирован нами ранее при сопоставлении с решением «Эйлер – 3» в п. 2.12. Что касается МКЭ, то видим нестабильный результат. Причем нестабильность получения решения МКЭ явно увеличивается с ростом высоты h_c калотты. Поэтому при выполнении сопоставления для схем с $h_c > 0{,}4$, расчет МКЭ уже не производился. Сопоставление теоретических оценок силы P предельного давления с результатами расчетов МПА при $h_c = 0{,}5\ldots1{,}0$ дано в приложении Д (рисунки Д.1…Д.3). В том же приложении Д на рисунках Д.4…Д.6 для большей наглядности дополнительно приведены сопо-

ставительные графики функций $P(h_c)$. Это те же данные аналитического расчета и расчета МПА, но представленные в несколько ином виде.

Результаты сопоставления для дисперсных грунтов. Сопоставление для дисперсных грунтов выполнялось, в целом, аналогично тому, как это только что было сделано для скальных. Отличия состояло лишь в условии прочности. Для дисперсных грунтов в качестве условия прочности принят закон Кулона-Мора. Расчетная схема для дисперсных грунтов такая же, как и для скальных грунтов (см. рисунок 4.2, *б*).

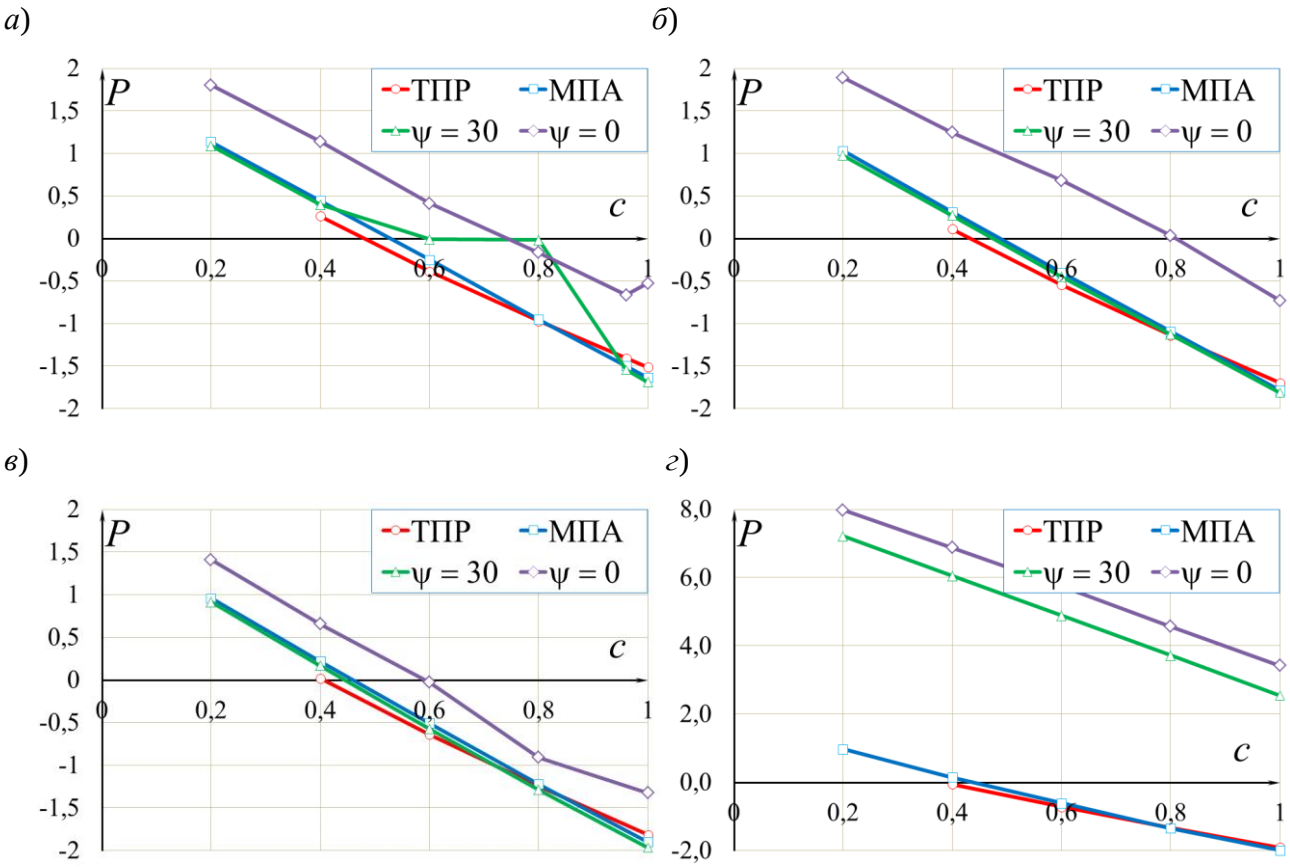


Рисунок 4.3 – Сопоставление значений $P(c)$, рассчитанных для $\varphi = 30°$ по ТПР, по МПА и по МКЭ ($\psi = 30$ и $\psi = 0$) при $h_c = 0{,}1$ (*а*), $h_c = 0{,}2$ (*б*), $h_c = 0{,}3$ (*в*), $h_c = 0{,}4$ (*г*)

Расчет выполнялся в относительных переменных $\gamma = 1$ и $a = 1$ для $\varphi = 30°$ и при значениях высоты калотты: $h_c = 0{,}1$, $h_c = 0{,}2$, $h_c = 0{,}3$, $h_c = 0{,}4$.

На рисунке 4.3 показаны сопоставительные графики $P(c)$, рассчитанные методом характеристик (красная линия «ТПР»), методом предельного анализа (синяя линия «МПА»). Результаты расчета МКЭ представлены двумя линиями:

– зеленая линия – это расчет с ассоциированным законом пластического течения, когда угол дилатансии $\psi = \varphi$;

– фиолетовая линия – это расчет с неассоциированным законом пластического течения, когда $\psi = 0$.

ТПР и МПА демонстрируют в целом неплохую сходимость результатов. Что касается МКЭ, то приходится констатировать нестабильность результатов расчета, выполненного этим методом.

В некоторых случаях МКЭ почти идеально повторяет результаты ТПР и МПА. Но при других исходных данных, как видно из графиков, МКЭ дает качественно иной результат, чем ТПР и МПА. Например, для $h_c = 0{,}1$ при $c = 0{,}6$ и $c = 0{,}8$ видим результаты, «ломающие» саму линию МКЭ при $\psi = \varphi$, а для $h_c = 0{,}4$ расхождение МКЭ с ТПР и МПА становится просто огромным, при чем и при $\psi = \varphi$, и при $\psi = 0$. Кроме того, результаты расчета МКЭ с ассоциированным и неассоциированным законом пластического течения расходятся между собой, что также порождает многочисленные вопросы к тому, как использовать МКЭ в подобных задачах.

Допустим, часть этих несоответствий можно снять, настраивая решатель ПК нужным образом в каждом конкретном расчете. Но тогда возникает вопрос: как определить те случаи, когда такая настройка необходима? В данных примерах у нас есть ориентир в виде результатов ТПР и МПА. А если этого ориентира нет, то как понять, что, например, результаты МКЭ при $h_c = 0{,}4$ завышены? Завышение предельной нагрузки, конечно, идет в запас расчета. А если при других исходных данных значение предельной нагрузки будут, наоборот, занижаться? Речь не идет о компрометации самого МКЭ, но, безусловно, речь идет о том, что результаты МКЭ в подобных задачах требуют повышенного внимания и проверки.

К этому добавим, что при $h_c = 0$ такая же схема для дисперсных грунтов была детально исследована Я.О. Стахнёвым. Что интересно, в его работах показано как раз удовлетворительное соответствие результатов ТПР, МПА и МКЭ. С другой стороны, Я.О. Стахнёвым было обнаружена и серьезная проблема в решениях

МКЭ – это проблема с выполнением требования равновесия [40]. Но это – вопрос, требующий уже более глубокого изучения, и задевающий отнюдь не только задачи теории сводообразования. Сейчас же, скорее, важно то, что МКЭ при $h_c = 0$ удавалось получить более или менее стабильное решение, а при $h_c > 0$ стабильность решения пропала. Еще раз подчеркнем, что среди причин вполне может оказаться и техническая – это проблемы т.н. решателя конкретного ПК *PLAXIS 2D*.

Что касается сопоставления ТПР с МПА, то о близости оценок предельной нагрузки, выполненных этими методами, свидетельствуют и данные, показанные на рисунке 4.4, где данные МКЭ уже не приводятся. Назовем две проблемы, выявленные при данном сопоставлении.

Первая. С ростом h_c решения ТПР показывают стабилизацию оценок силы P в то время, как МПА показывает, что что с ростом h_c сила P предельного давления продолжает неуклонно снижаться.

Вторая. При малых значениях удельного сцепления $c = 0{,}4…0{,}6$ метод предельного анализа (МПА) дает более высокие значения P, чем ТПР. А уже начиная с $c = 0{,}7$ и выше ситуация становится обратной – сила, рассчитанная по ТПР становится больше, чем сила, рассчитанная МПА.

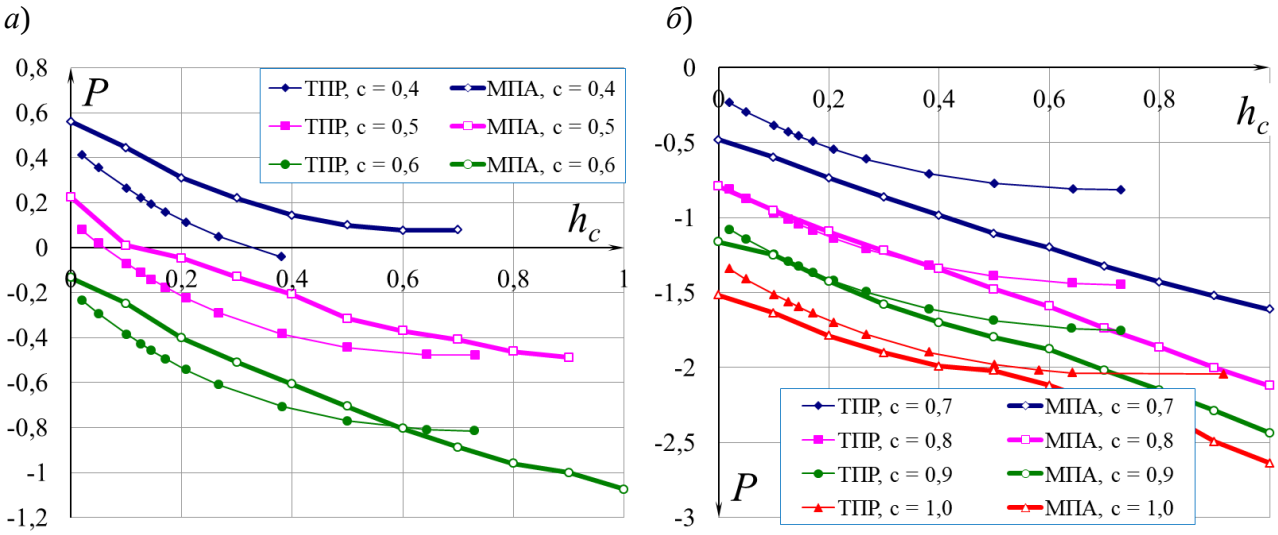


Рисунок 4.4 – Сопоставление с МПА при сводообразовании над калоттой в дисперсных грунтах: функции предельной силы $P(h_c)$ при $c = 0{,}4…0{,}6$ (слева) и при $c = 0{,}7…1{,}0$ (справа)

Зафиксируем еще один момент, который также может иметь значение при

проектировании подземных сооружений. Графики зависимостей $p(h_c)$, рассчитанных по ТПР, имеют ярко выраженный минимум (см. рисунок 3.11), в то время как аналогичные зависимости, полученные МПА, показывая в целом близкие значения, такой особенностью не обладают, хотя и имеют в чем-то схожее поведение (рисунок Д.7). Считаем, что этот вопрос может быть вынесен в перечень вопросов для дальнейших исследований.

О сетках линий скольжения. Приведем еще один способ сопоставить результаты ТПР и МПА. Наложим сетки линий скольжения, рассчитанные методом характеристик ТПР, на эпюры максимальных деформаций сдвига γ_{max}, вычисленных МПА для различной высоты калотты h_c = 0,1…0,6 (рисунок 4.5). Здесь принято: $\gamma = 1$ и $a = 1$, $\varphi = 30°$, $c = 0{,}5$.

Результат такого наложения можно оценить как вполне удовлетворительный. Хочется отметить, что без «подсказки» в виде сетки характеристик, построенной в рамках ТПР, не так просто с достаточной точностью определить контур свода обрушения.

4.3. Сопоставление с данными натурных измерений

Общие положения. В качестве реальных данных, на которых проверялись аналитические решения, полученные в данной диссертации, возьмем результаты горно-экологического мониторинга, выполненного институтом АО НИПИИ «Ленметрогипротранс» для двух железнодорожных тоннелей. Эти данные принимались по открытым источникам, в частности, по [57, 58]. В процессе мониторинга были измерены нормальные тангенциальные напряжения во временной крепи и в постоянной обделке путём заложения в конструкцию струнных датчиков с определением смещения контура. Результатом выполненного мониторинга служат кривые развития во времени деформаций и нормальных тангенциальных напряжений.

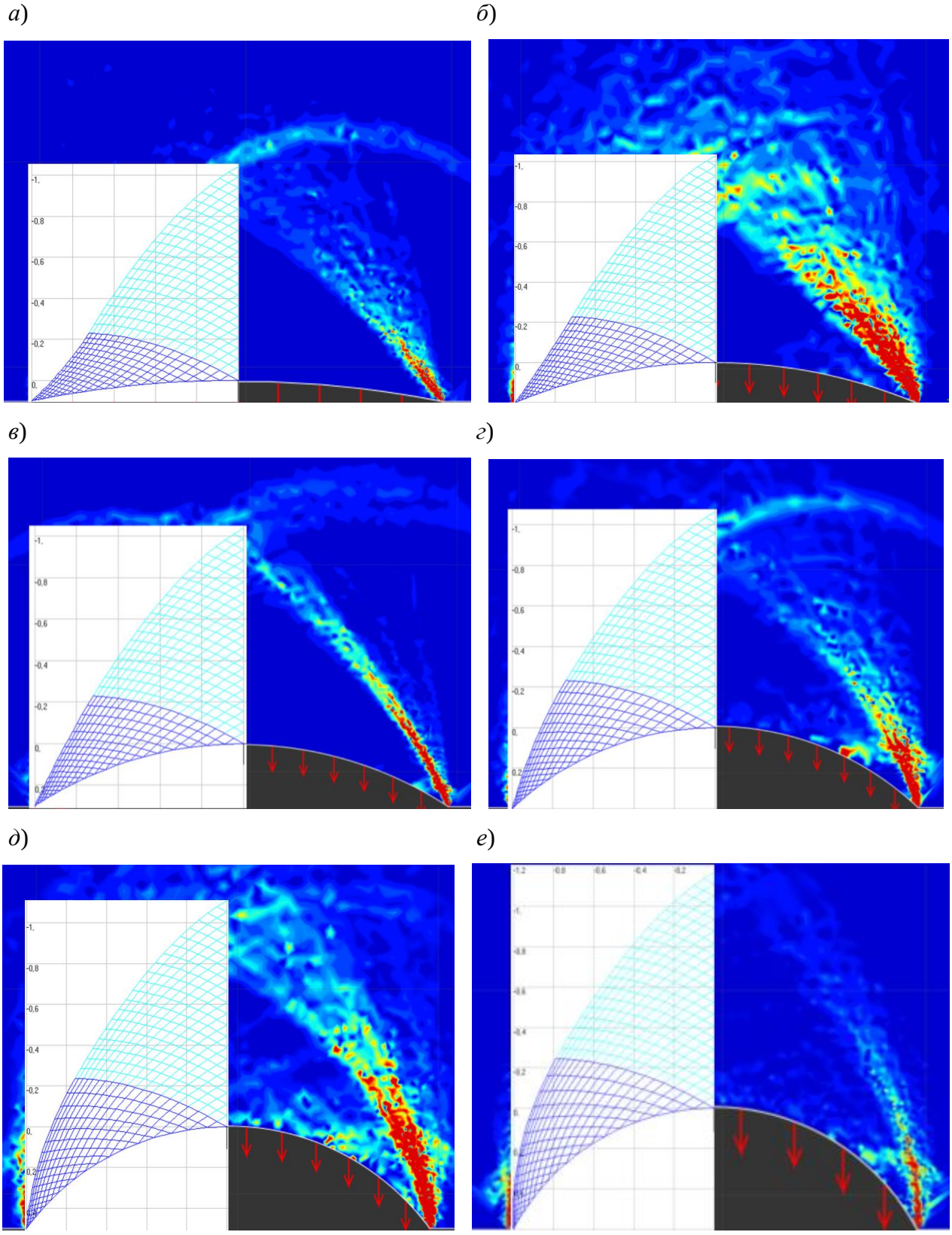


Рисунок 4.5 – Наложение сеток линий скольжения, построенных методами ТПР, на поле максимальных деформаций сдвига, построенных МПА, при значениях высоты калотты: h_c = 0,1 (*а*); h_c = 0,2 (*б*); h_c = 0,3 (*в*); h_c = 0,4 (*г*); h_c = 0,5 (*д*); h_c = 0,6 (*е*)

Для сопоставления решений **для скальных грунтов** («Эйлер – 3» и «Эйлер – 3» с калоттой) выбраны результаты мониторинга железнодорожного Олим-

пийского тоннеля №1 на трассе Адлер–Альпика-Сервис, который проходил в скальных грунтах – в слабых известковистых аргиллитах [57].

Для сопоставления решений **для дисперсных грунтов**, полученных методом характеристик ТПР, выбраны результаты мониторинга Большого петлевого тоннеля на участке Армавир–Туапсе Северо-Кавказской железной дороги, который проходил, в том числе, через участки тектонических разломов, где грунты представлены аргиллитами, глинистыми сланцами сильнотрещиноватыми до раздробленных. Эти грунты уже ведут себя как крупнообломочные [58].

Фактический материал для сопоставления в скальных грунтах. Для сопоставления полученных теоретических результатов для скальных грунтов с фактическими данными были рассмотрены материалы, опубликованные сотрудником института «Ленметрогипротранс» М.О. Лебедевым в журнале «Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук» [57]. В его статье приводятся результаты горно-экологического мониторинга железнодорожного Олимпийского тоннеля №1 на трассе Адлер–Альпика-Сервис, который проходил, как уже сказано, в слабых известковистых аргиллитах с пределом прочности грунта на одноосное сжатие $R_c = 0{,}45$ МПа. Проходка тоннеля осуществлялась методом поэтапного раскрытия сечения – с разделением на калотту и штроссу. Временная крепь калотты на участке слабых аргиллитов выполнялась из двутавровых арок N24 с шагом 1 м и заполнением межрамного пространства бетоном В25.

На рисунке 4.6, *а*, показаны основные элементы конструкций тоннеля с указанием мест размещения струнных датчиков, по результатам измерений которых строились графики изменения нормальных тангенциальных напряжений во временной крепи и в постоянной обделке. Струнные датчики размещались и во временной конструкции, и в постоянной обделке, поэтому имеется возможность сравнить измеренные напряжения и рассчитанные аналитически в обоих случаях. Таким образом, по результатам горно-экологического мониторинга напряжения во временной крепи не превысили 9 МПа, а в постоянной обделке напряжения составили 8 МПа.

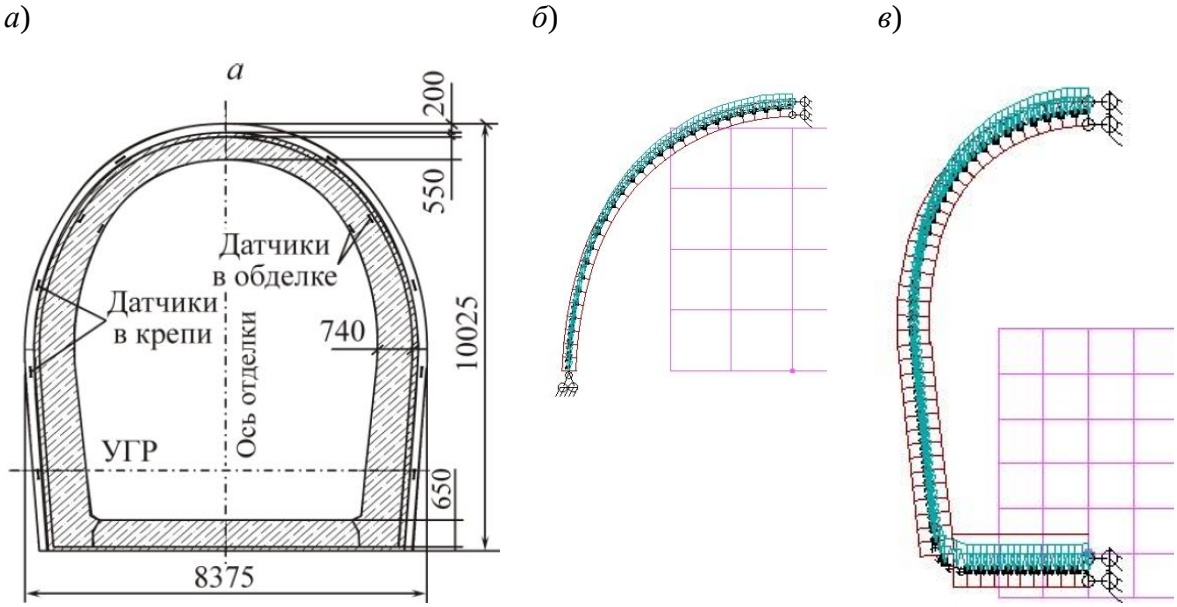


Рисунок 4.6 – Основные элементы конструкции тоннеля на трассе Адлер–Альпика-Сервис (*а*), численная модель калотты (*б*) и численная модель постоянной обделки (*в*)

О различиях в методах сбора нагрузок на временную и постоянную крепь. Временная крепь держит выработку гораздо меньшего сечения, чем постоянная, поэтому имеет смысл рассматривать временную и постоянную крепь по различным схемам. Главное отличие состоит в том, что при определении давления грунта на калотту, у которой ширина b_c определенно больше высоты h_c, нет необходимости учитывать боковые призмы обрушения (см. рисунок 3.1). Призмы обрушения являются обязательным элементом расчетной схемы для тоннеля полного сечения, потому что при большой высоте сечения естественно ожидать обрушения грунта с боковых стен тоннеля. Если же $h_c > b_c$, то реализация боковой потери устойчивости грунта в выработку затруднена.

Результаты сопоставления для скальных грунтов. Сопоставительные расчеты выполнялись на заданные нагрузки [111]. Сбор нагрузок осуществлялся трижды – по коэффициенту крепости [99-102], по прочности на сжатие [111] и по полученным решениям.

Как было сказано в первой главе, расчет высоты свода обрушения с использованием формулы (1.4) появился в нормах только в 2012 году.

Соответственно, эта формула, предложенная еще самим М.М. Протодьяконовым, с 2012 года стала носить обязательный (с учетом огово-

рок, сделанных в [110]) характер. До 2012 года высоту свода обрушения вычисляли по формуле (1.2), прямо следующей из определения коэффициента крепости (1.3).

Поскольку Олимпийский тоннель №1 был запроектирован до выхода СП 122.13330.2012 [110], то, вероятнее всего, нагрузка на него собиралась исходя из величины коэффициента крепости, назначаемой в соответствии с [99-102] по шкале М.М. Протодьяконова.

Тем больший объем получат результаты сопоставлений, если будут дополнены расчетами, выполненными по нормативным методикам разных лет:

– по методике сбора нагрузок на базе шкалы проф. М.М. Протодьяконова, как это было регламентировано нормами до 2012 года,

– по методикам действующих СП.

Итак, в таблице 4.1 приведены значения высоты h свода обрушения, вычисленные

– по СНиП II-44-78 [102] для $f = 0{,}8$;

– по СП 122 [111] для $R_c = 0{,}45$ МПа;

– по предлагаемой методике также для $R_c = 0{,}45$ МПа.

Таблица 4.1 – Сравнение значений высоты h сводов обрушения, рассчитанных по СНиП II-44-78 [102], по СП 122.13330.2023 [111] и предлагаемой методике «Эйлер – 3»

Способ сбора нагрузки	Для расчета временной крепи			Для расчета постоянной обделки		
	СНИП II-44-78	СП 122	«Эйлер – 3» с калоттой	СНИП II-44-78	СП 122	«Эйлер – 3»
Расчетная формула для h	$\frac{l/2}{f}$	$\frac{l}{0{,}2R_c\alpha}$	$\frac{R_t}{\gamma}\cdot\left(\frac{\gamma b_c}{2C_0}\right)^{\frac{1}{m}} - h_c$	$\frac{l/2}{f}$	$\frac{l}{0{,}2R_c\alpha}$	$\frac{R_t}{\gamma}\cdot\left(\frac{\gamma l}{2C_0}\right)^{\frac{1}{m}}$
Высота h свода, м	7,76	153,3	4,83	11,26	222,5	9,03

Прежде чем продолжить, нельзя не обратить внимания на выбивающиеся из ряда вон числа, рассчитанные по действующим нормам. Собственно говоря, это – как раз та ситуация, о которой речь шла и у Я.О. Стахнёва [116], и уже в 1-й главе настоящей работы – это ситуация чрезвычайного занижения значения коэффициент крепости, рассчитанного по формуле $f = R_c$ /10 при малых значениях R_c. В

частности, при R_c = 0,45 МПа имеем f = 0,045. Заметим, что по шкале М.М. Протодьяконова плывунам отвечает значение f = 0,3.

Далее, следуя стандартному алгоритму, выполнялся расчет внутренних усилий в элементах временной крепи и постоянной обделки методом Мосметрогипротранса, после чего вычислялись напряжения, которые и подлежали сравнению с замеренными величинами. Расчет внутренних усилий осуществлялся в ПК TUN2, разработанном около сорока лет назад под руководством проф. Н.Н. Шапошникова (МИИТ). Левые половины численных моделей из этого ПК даны на рисунках 4.6, *б*, *в*.

По итогам расчетов временной крепи и постоянной конструкции были получены эпюры внутренних усилий – нормальных сил и моментов. Далее, были рассчитаны нормальные тангенциальные напряжения для трех описанных способов нагружения конструкций тоннеля горным давлением. Значения вычисленных нормальных тангенциальных напряжений приведено в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Сопоставление напряжений (МПа) в обделке, рассчитанных по СНиП II-44-78 [102], по СП 122.13330.2023 [111] и предлагаемой методике «Эйлер – 3», с фактически измеренными значениями

Во временной крепи калоттной части				В постоянной обделке			
СНИП II-44-78	СП 122	«Эйлер – 3» с калоттой	Измеренные	СНИП II-44-78	СП 122	«Эйлер – 3»	Измеренные
21,6	415	13,6	9	11,5	223	9,3	8

Методика СП [111] ожидаемо привела к огромным напряжениям – 415 МПа и 223 МПа. Причины этого обсуждались только что.

Наконец, зафиксируем главное: напряжения, рассчитанные по предлагаемой методике, составили 13,6 МПа во временной крепи и 9,3 МПа в постоянной обделке, и они оказались наиболее близки к измеренным значениям – 9,0 МПа во временной крепи и 8,0 МПа в постоянной обделке.

Сопоставление напряжений в крепи калотты в дисперсных грунтах. Для сопоставления полученных теоретических результатов в дисперсных грунтах с фактическими данными были рассмотрены материалы, опубликованные М.О.

Лебедевым (АО НИПИИ «Ленметрогипротранс») и В.В. Балыкиным (ООО «Южное горно-строительное управление») в журнале «Метро и тоннели» [58]. В данной статье приводятся результаты натурных измерений напряжений в конструкциях Большого петлевого тоннеля на участке Армавир–Туапсе Северо-Кавказской железной дороги. В процессе строительства сначала осуществлялась проходка калоттной части на всю длину тоннеля, после чего шла разработка нижнего уступа – штроссы. На рисунке 4.7, *а*, приведена общая схема тоннеля.

Нормальные тангенциальные напряжения в крепи калотты измерялись с применением струнных датчиков [58]. По результатам мониторинга напряжения в замковой части крепи калотты составили 16…18 МПа. Для выполнения сопоставления нами была смоделирована калоттная часть тоннеля. Левая половина симметричной численной модели схемы из ПК TUN2 представлена на рисунке 4.7, *б*. Расчет выполнялся на заданные нагрузки. Сбор нагрузок осуществлялся и по полученным в главе 3 решениям ТПР, и по действующей нормативной методике [111].

а) *б*)

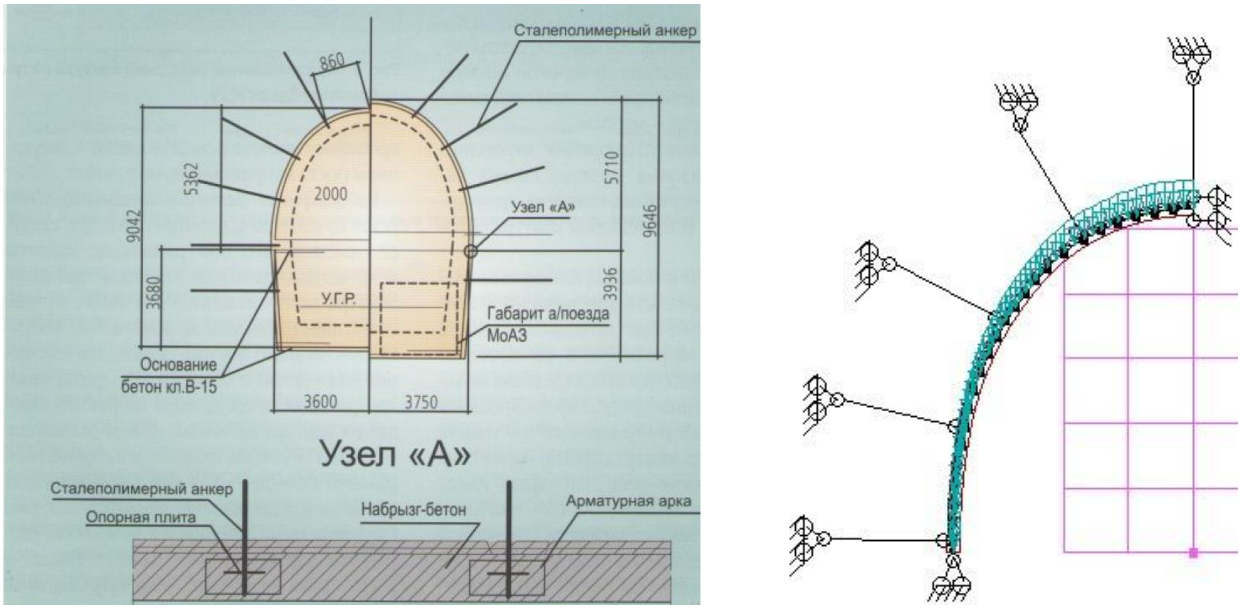


Рисунок 4.7 – Основные элементы конструкции Большого петлевого тоннеля (*а*) и численная модель временной крепи калотты (*б*)

Поскольку в данном случае мы имеем дело с разборной скалой, которую не

было возможности испытать на одноосное сжатие, то в рамках нормативной методике для нее принимался коэффициент крепости f = 0,8, указанный в данной статье [58]. Вертикальная нагрузка в обоих случаях вычислялась по формуле (1.1). По ТПР высота h принималась по решениям, описанным в главе 3, для прочностных характеристик φ = 40° и c = 5 кПа. Удельный вес грунта принят равным γ = 19,5 кН/м^3.

По итогам расчета в ПК TUN2 были получены эпюры внутренних усилий, по которым уже вычислялись значения напряжений. В замковой части свода, т.е. там, где были измерены напряжения, рассчитаны тангенциальные напряжения по нормам [111] и по разработанной методике. Сопоставление теоретических результатов с опытными данными приведено в таблице 4.3. Напряжения, рассчитанные по ТПР, более близки к измеренным значениям.

Таблица 4.3 – Сопоставление теоретических результатов с опытными данными

Описание тоннеля	Грунты	Нормальные тангенциальные напряжения в замке калотты, МПа		
		СП	ТПР	Измер.
Большой петлевой тоннель на участке Армавир-Туапсе	Аргиллиты, глинистые сланцы сильнотрещиноватые до раздробленных (f = 0,8)	22,1	20,6	16…18

Общий вывод по результатам сопоставления. Данные таблиц 4.1…4.3 достаточно убедительно свидетельствуют о правомерности применения разработанных решений задачи о сводообразовании над криволинейными сооружениями и в скальных грунтах, и дисперсных.

4.4. Сопоставление с нормативными методиками

Прежде чем переходить непосредственно к сопоставлению с нормативными методиками, еще раз обратим внимание на важное обстоятельство: в настоящей диссертации рассматривается чрезвычайно распространенная схема. Эта схема положена в основу проектов практически всех тоннелей, построенных в нашей

стране, как минимум, с момента выхода СНиП 1954 г [100] и последующей редакции 1962 г [101]. Поэтому приведенные выше сопоставления с данными натурных измерений в каком-то смысле носят частный характер, что не отменяет их значимости. Наиболее же информативным и важным, на наш взгляд, будет сопоставление с нормативными методиками и с теми подходами, которые уже закрепились и в практике подземного строительства, и в научных исследованиях.

Сопоставление с нормативной методикой и формулами М.М. Протодьяконова и Л.И. Барона. В действующих нормативных документах [109, 111] фактически принято, что коэффициент крепости вычисляется по формуле (1.4), которая была предложена еще М.М. Протодьяконовым, но с поправкой на трещиноватость:

$$f = \frac{R_c}{10} \cdot \alpha, \tag{4.3}$$

где α – коэффициент, учитывающий влияние трещиноватости, и принимаемый по [109] (см. таблицу 1.2).

В явном виде формулы (4.3) в нормах нет, однако формулы (5.8) и (5.9) в СП 120 [109] и формулы (5.7) и (5.8) в СП 122 [111] однозначно следуют из (1.2) и (4.3).

Проблема в том, что формула (4.3) дает противоречивые результаты при малых R_c, а при больших R_c (начиная с 200 МПа и выше) вступает в противоречие со шкалой М.М. Протодьяконова. Подробнее об этом – см. шестой вывод по результатам анализа нормативной методики и теории М.М. Протодьяконова из главы 1, п. 1.2.

Описанное в п. 1.2 противоречие, отчасти, устраняется использованием формулы Л.И. Барона (1.5). Так, для грунтов с R_c = 10 МПа коэффициент крепости равен 2,2, а при R_c = 400 МПа имеем f = 25. С другой стороны, уже при R_c = 1 МПа имеем f = 0,6, т.е. как для суглинков и глин полутвердой консистенции согласно [109, таблица 5.9]. Другими словами, применение формулы Л.И. Барона до конца проблемы не снимает.

Для гидротехнических туннелей формула (4.3), но без коэффициента α,

также рекомендована нормами [107], где она описана в тексте п. 5.4.

С другой стороны, учитывая количество подземных объектов, запроектированных на основе шкалы М.М. Протодьяконова, впоследствии построенных и по сей день эксплуатируемых, эта шкала может рассматриваться, образно говоря, как описание результатов метаэксперимента, что, конечно, не отменяет необходимости ее совершенствования.

С позиций приоритета шкалы М.М. Протодьяконова проанализируем взаимное соответствие предлагаемого решения, нормативной методики, основанной на формуле М.М. Протодьяконова (4.3), и формулы Л.И. Барона (1.5).

В принципе, можно сравнить значения высоты свода обрушения, вычисленные сравниваемыми методами. Однако, на наш взгляд, более наглядным было бы сравнить значения коэффициентов крепости. По М.М. Протодьяконову и по Л.И. Барону для этого непосредственно используются формулы (4.3) и (1.5). Предлагаемое в настоящей статье решение также позволяет перейти к величине f. Если положить в формуле (2.32) $x = a$, то высота свода обрушения будет равна

$$h = \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma a}{C_0} \right)^{\frac{1}{m}}, \tag{4.4}$$

и тогда, разделив половину пролета свода на эту высоту, можно перейти к величине коэффициента крепости, которая будет уже основана на предлагаемом здесь решении и на классическом определении (1.3).

Допустим, что пролет свода обрушения равен $2a$ = 20 м, а удельный вес грунта γ = 25 кН/м^3. Параметры условия прочности (2.6) в этом примере приняты равными: $R_t = -0{,}1R_c$, $C_0 = -0{,}2R_c$, $m = 0{,}64$. На рисунке 4.8 для различной прочности R_c (по модулю) показаны значения коэффициента крепости, вычисленные по формулам (1.3) и (4.4) (линия «Эйлер»), с величинами, вычисляемыми по формулам (4.3) (линия «СП») и (1.5) (линия «Барон»). Приведенное сопоставление до известной степени условно. Во-первых, параметры прочности для условия (2.6) приняты по выборочным данным, имевшимся в распоряжении авторов. Во-вторых, пролет свода обрушения здесь принят постоянным, в то время как он бу-

дет зависеть от прочности R_c. Несмотря на это, можно сделать некоторые выводы.

а) *б*)

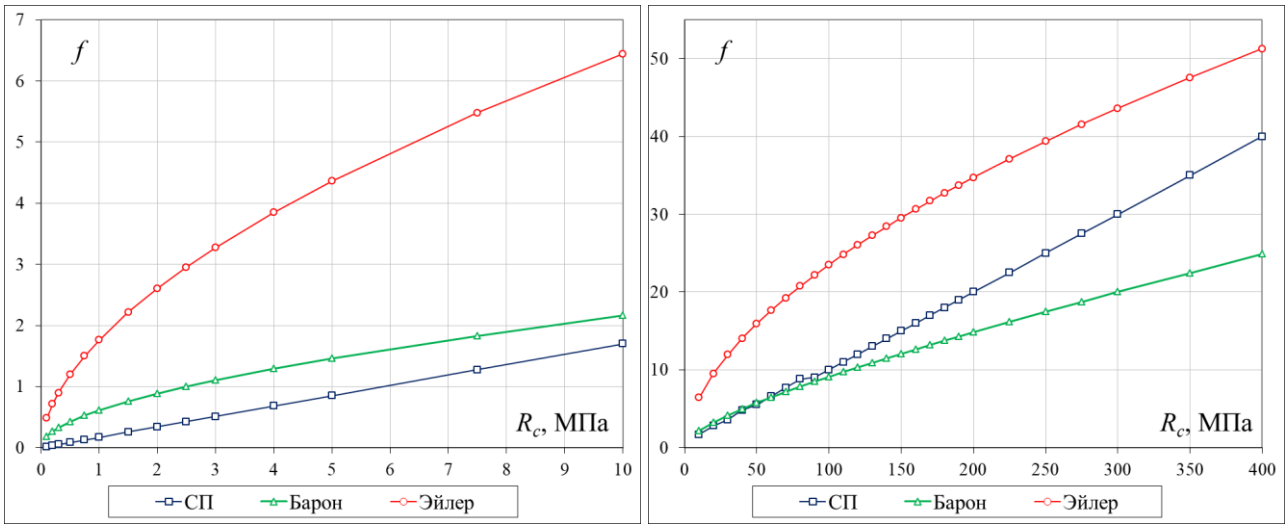


Рисунок 4.8 – Сопоставление коэффициентов крепости, полученных по предлагаемому решению («Эйлер»), по нормативной методике (СП) и по Л.И. Барону:
а – для диапазона R_c от 0,1 до 10 МПа; *б* – для диапазона R_c до 400 МПа

Выводы по результатам сопоставления. В целом, предлагаемое решение дает более высокие значения коэффициента крепости, чем формулы (4.3) и (1.5). При R_c > 100 МПа расхождение с СП и с Бароном составляет 1,2…2,5 раза. При R_c = 50…100 МПа расхождение с СП и с Бароном составляет 2,35…2,9 раза. При R_c = 10…50 МПа – уже 2,8…3,8 раза. Наконец, при R_c < 10 МПа это расхождение достигает порядка 10…30 раз с методикой СП, но по сравнению с формулой Л.И. Барона снижается с 3 до 2,5 раз.

С одной стороны, такие расхождения являются существенными, но с другой – именно при малых значениях R_c методика СП приводит к парадоксальным результатам, которые описаны выше и которые изначально желательно было устранить. Так, грунту с R_c = 1 МПа согласно [111] отвечает коэффициент крепости 0,17 (при α = 1,7), т.е. в почти два раза меньше, чем у плывунов! Применение формулы (1.5), как уже говорилось, также дает заниженные значения *f*. Предлагаемое здесь решение открывает пути к устранению этого противоречия.

Что касается значений R_c > 100 МПа, то здесь предлагаемое решение сильно превышает максимальное значение крепости, равное 20, из шкалы М.М. Протодь-

яконова. С одной стороны, это ведет к занижению горного давления на конструкции тоннелей по сравнению с теми значениями, которые дает проверенная шкала М.М. Протодьяконова. С другой стороны, предлагаемое решение имеет определенное теоретическое обоснование, а хорошая сходимость результатов с МПА (см. рисунок 2.16), как уже отмечалось, свидетельствует в пользу того, что это решение принципиально корректно описывает предельное равновесие свода обрушения. Очевидно, что сопоставление цифр, полученных МПА, с цифрами, полученными по формулам СП и Л.И. Барона, покажет очень близкую картину к тому, что изображено на рисунке 4.8.

Прямое внедрение предложенных решений для скальных грунтов, конечно же, позволит конструировать более экономичные обделки тоннелей и подземных сооружений. Однако, есть два вопроса, которые требуют особого внимания.

Первый – это вопрос о практической и экспериментальной проверке. Если шкала М.М. Протодьяконова проверяется на практике уже почти сто лет, то быстро набрать хоть сколько-нибудь сопоставимый по объему опытный материал достаточно сложно.

Второй – это вопрос о том, насколько качественными будут паспорта прочности скальных грунтов при их массовом использовании. И дело тут не столько в оснащенности лабораторий проектно-изыскательских институтов или квалификации сотрудников, сколько в очень большом разбросе частных значений даже такого простого параметра как прочность скального грунта на одноосное сжатие, не говоря об испытаниях на растяжение или объемное сжатие.

Тем не менее, по мнению автора, есть возможность рекомендовать и практическую методику для предварительного определения величины горного давления, учитывая результаты выполненных сопоставлений с численными методами, данными натурных измерений, а также сопоставлений с нормативными методиками разных лет.

Прежде чем переходить непосредственно к изложению практической методики, скорректируем полученные решения с учетом результатов выполненных сопоставлений.

Корректировка теоретических решений по результатам выполненного сопоставления. Отталкиваясь от проанализированного выше сопоставления с формулами М.М. Протодьяконова и Л.И. Барона (см. рисунок 4.8), а также ориентируясь на шкалу М.М. Протодьяконова, можно предложить следующую модификацию формулы (4.4) для предварительных расчетов вертикальной нагрузки на конструкции тоннелей от горного давления [48]:

$$h = \frac{\kappa}{\alpha} \cdot \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma a}{C_0} \right)^{\frac{1}{m}}, \qquad (4.5)$$

Здесь κ – поправочный коэффициент, равный:

$\kappa = 0{,}005R_c + 2$ при длине пролета свода обрушения до 15 м;

$\kappa = 0{,}0025R_c + 1.5$ при длине пролета свода обрушения свыше 15 м.

В формулы для κ значение R_c подставляется в МПа и по модулю.

Параметры прочности для предварительных расчетов рекомендуется принять равными:

$$R_t = -0{,}1R_c, \qquad C_0 = -0{,}2R_c, \qquad m = 0{,}64. \qquad (4.6)$$

Для коэффициента α, учитывающего влияние трещиноватости, можно предложить таблицу 4.4, которая составлена на базе нормативных значений – см. таблицу 1.2 или [108, таблица 5.10]. В частности, коэффициент α предполагается равным единице для практически нетрещиноватых грунтов, а его остальные значения могут быть получены делением величин, указанных в таблице 1.2, на максимальную величину в соответствующем столбце.

Таблица 4.4 – Коэффициенты α, учитывающие влияние трещиноватости

Категория массива скальных грунтов по степени трещиноватости	Коэффициент α при пределе прочности грунта «в куске» на сжатие, МПа				
	10	20	40	80	160
I - практически нетрещиноватые	1	1	1	1	1
II - малотрещиноватые	0,8	0,9	0,8	0,8	0,8
III - среднетрещиноватые	0,7	0,6	0,6	0,5	0,5
IV - сильнотрещиноватые	0,5	0,5	0,4	0,4	0,3
V - раздробленные (разборная скала)	0,4	0,3	0,3	0,2	0,1

Для наглядности на рисунке 4.9 даны сопоставительные графики коэффици-

ентов крепости, рассчитанных, как и ранее, по формулам (4.3) и (1.5), с коэффициентами крепости, рассчитанными по предлагаемой методике, т.е. по формулам (1.3) и (4.5).

а) *б*)

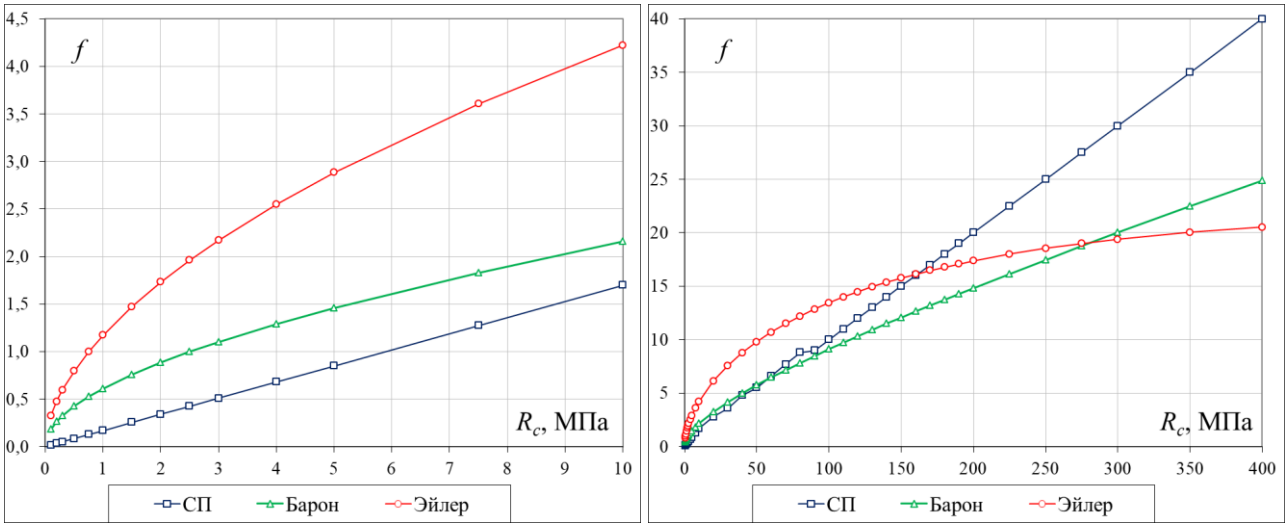


Рисунок 4.9 – Коэффициенты крепости f, рассчитанные по предлагаемой практической методике («Эйлер»), по нормативной методике (СП) и по Л.И. Барону: *а* – для диапазона прочности R_c от 0,1 до 10 МПа; *б* – для диапазона прочности R_c до 400 МПа

Все это позволит проектировать более легкую (по сравнению с [111]) крепь для грунтов с $R_c < 150$ МПа, а при $R_c \to 400$ МПа коэффициент крепости f стремится к значению 20, что лучше соответствует шкале М.М. Протодьяконова.

4.5. Практическая методика для предварительной оценки горного давления на подземные сооружения

Общие положения. При определении нагрузок на подземные сооружения от горного давления следует рассматривать два принципиально различных типа грунтовых условий и два принципиально различных типа подземных сооружений [68].

По грунтовым условиям – это скальные и дисперсные грунты. Зафиксируем их принципиальные отличия (рисунок 4.10).

Первое отличие – паспорт прочности. Прочность дисперсных грунтов описывается законом Кулона

$$\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg}\varphi + c,$$

где φ и c – стандартные прочностные характеристики дисперсного грунта.

Определение прочности скальных грунтов регламентируется ГОСТ 21153.8-88 [24]. В качестве условия прочности примем уравнение, отличное от рекомендуемого в ГОСТ, а именно:

$$\tau_n = C_0 \left(1 - \frac{\sigma_n}{R_t}\right)^m,$$

где C_0 – аналог удельного сцепления; R_t – прочность на одноосное растяжение; m – параметр огибающей предельных кругов Мора.

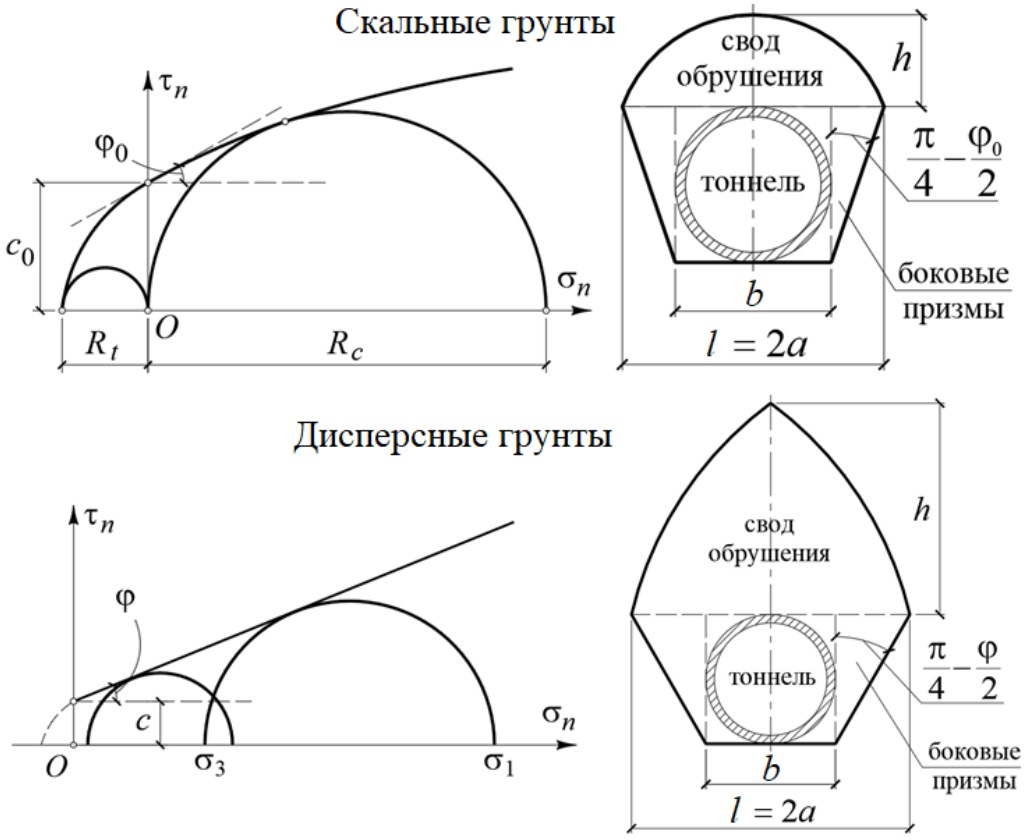


Рисунок 4.10 – К общей концепции практической методики

Для предварительной оценки давления грунта на подземные конструкции параметры C_0, m, R_t могут быть вычислены по формулам (4.6) в зависимости от прочности грунта на одноосное сжатие R_c.

Второе отличие – форма свода обрушения. В скальных грунтах свод обру-

шения имеет вид гладкой арки, в дисперсных – стрельчатой.

По геометрии подземных сооружений также следует рассматривать два различных случая. Во-первых, это – сооружения, у которых высота и ширина сопоставимы, и во-вторых, это – сооружения, у которых ширина существенно превышает высоту. В последнем случае это означает, что боковые призмы обрушения или не формируются вовсе, или их воздействие незначительно. В действующем СП предусмотрен такой случай – когда горизонтальное давление на конструкцию тоннелей невозможно.

К сооружениям, у которых ширина существенно превышает высоту, можно отнести, например, станции метрополитенов. Однако четких критериев, каким должно быть соотношение высоты и ширины, чтобы формированием боковых призм можно было пренебречь, не выработано. В то же время, с точки зрения силового взаимодействия с грунтом к таким сооружениям вне всяких сомнений относятся калотты. Поэтому при описании практической методики апеллировать будем, прежде всего, к калоттам.

Подземные сооружения в скальных грунтах. При рассмотрении скальных грунтов следует рассматривать два принципиально различных случая, предусмотренных действующими нормами [111, п. 5.5.2.7]:

- грунт оказывает вертикальное и горизонтальное давление;
- грунт оказывает только вертикальное давление.

Грунт оказывает вертикальное и горизонтальное давление. Расчетная схема подземного сооружения показана на рисунке 1.1 с заменой кажущегося угла внутреннего трения $\varphi_к$ на угол φ_0 для скальных грунтов (см. рисунок 4.10 или рисунок 1.6):

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(C_0 m).$$

Вертикальная нагрузка рассчитывается по формуле (1.1):

$$p = \gamma h.$$

Высота свода обрушения вычисляется по формуле (4.5) [49]:

$$h = \frac{\kappa}{\alpha} \cdot \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma a}{C_0} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

О назначении величин к и α см. пояснения к ф-ле (4.5); полупролет свода обрушения рассчитывается как

$$a = l / 2 + h_t \operatorname{tg}(\pi / 4 - \varphi_0 / 2).$$

Горизонтальное давление рассчитывается по формуле:

$$q = \gamma (h + 0{,}5 h_t) \operatorname{tg}^2 (\pi / 4 - \varphi_0 / 2).$$

Грунт оказывает только вертикальное давление. Помимо случаев, предусмотренных СП [109, 111], сюда же следует включить случай калотты и случай широких подземных выработок (см. выше).

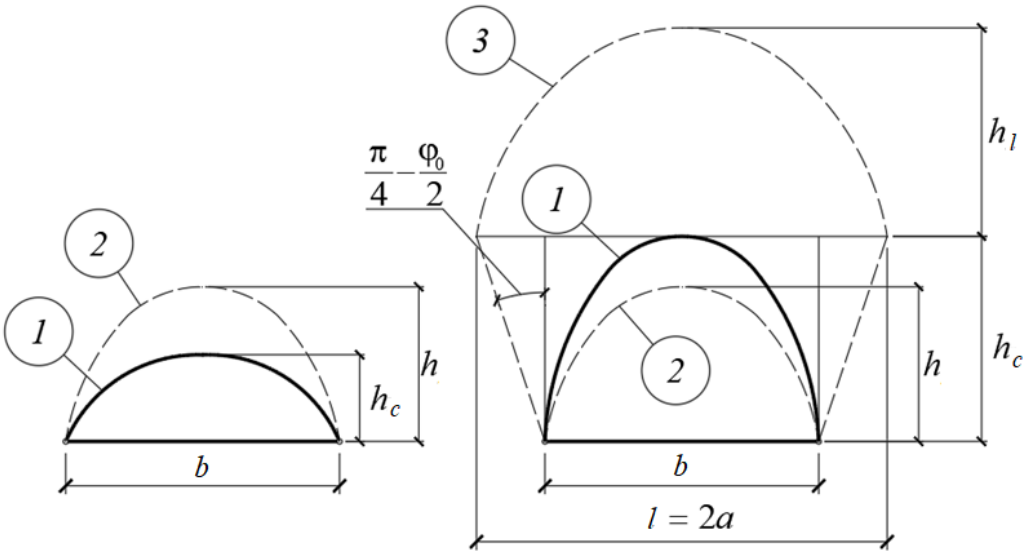


Рисунок 4.11 – Смена расчетной схемы:
1 – криволинейная конструкция высотой h_c;
2 – свод обрушения при $h_c < h$; *3* – свод обрушения при $h_c > h$

В этом случае можно воспользоваться уже приведенными формулами с заменами:

$$a = b / 2; \qquad q = 0.$$

Если в этом случае подземное сооружение обладает верхней конструкцией криволинейного очертания с подъемом высотой h_c, то высота свода обрушения вычисляется по формуле:

$$h = \frac{\kappa}{\alpha} \cdot \frac{R_t}{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma a}{C_0} \right)^{\frac{1}{m}} - h_c .$$

Если вычисленная таким образом величина $h < 0$, то схема обрушения меняется так, как показано на рисунке 4.11.

Подземные сооружения в дисперсных грунтах. Здесь также рассмотрим два случая: подземные сооружения полного сечения и крепление калотты.

Подземные сооружения полного сечения. Расчетная схема остается такой же (см. рисунок 1.1) с заменой кажущегося угла $\varphi_к$ на угол φ внутреннего трения.

Вертикальная нагрузка рассчитывается по формуле (1.1):

$$p = \gamma h .$$

Высота свода обрушения вычисляется по формуле (4.5):

$$h = \bar{h} a ,$$

где $\bar{h}$ – относительная высота свода обрушения, принимая в зависимости от φ и относительного удельного сцепления $\bar{c} = c/(\gamma a)$ по таблице 4.5.

Таблица 4.5 – Относительная высота $\bar{h}$ свода обрушения в дисперсных грунтах

$\bar{c}$	φ = 5°	φ = 10°	φ = 15°	φ = 20°	φ = 25°	φ = 30°	φ = 35°	φ = 40°	φ = 45°
0,1	1,441								
0,2	1,148	1,326	1,418						
0,3	1,064	1,139	1,218	1,303	1,297				
0,4	1,024	1,055	1,089	1,131	1,171	1,215	1,174		
0,5	1,001	1,007	1,016	1,032	1,052	1,078	1,100		
0,6	0,987	0,977	0,970	0,969	0,971	0,985	1,003		
0,7	0,976	0,956	0,938	0,926	0,918	0,920	0,926		
0,8	0,968	0,940	0,914	0,894	0,878	0,870	0,870		
0,9	0,962	0,928	0,897	0,870	0,848	0,833	0,826	0,830	
1	0,958	0,919	0,883	0,852	0,824	0,804	0,791	0,788	0,799
1,25	0,949	0,902	0,858	0,818	0,783	0,753	0,730	0,715	0,712
1,5	0,944	0,892	0,842	0,798	0,757	0,721	0,691	0,668	0,655
1,75	0,940	0,883	0,831	0,783	0,738	0,698	0,664	0,635	0,615
2	0,937	0,878	0,823	0,772	0,725	0,682	0,644	0,611	0,586
2,5	0,933	0,870	0,811	0,757	0,706	0,660	0,617	0,580	0,548
3	0,930	0,865	0,804	0,747	0,694	0,645	0,600	0,559	0,523

Эти цифры рассчитаны по решению Я.О. Стахнёва. Они приводятся здесь, потому что в его диссертации приведена формула только для $\varphi = 30°$.

Полупролет свода обрушения рассчитывается по формуле:

$$a = l/2 + h_t \operatorname{tg}(\pi/4 - \varphi/2).$$

Горизонтальное давление вычисляется по формуле:

$$q = \gamma(h + 0{,}5h_t)\operatorname{tg}^2(\pi/4 - \varphi/2).$$

В качестве отступления от описания практической методики. Приведенные в таблице 4.5 данные позволяют вычислить коэффициент крепости f в стандартном виде для различных значений φ и c. Результаты вычислений показаны на графиках рисунка 4.12. Графики построены в относительных величинах: $\gamma = 1$ и $a = 1$. Приведем пример: если удельный вес грунта $\gamma = 20$ кН/м^3 а полуширина выработки 2 м, то относительное значение сцепления 1 будет соответствовать абсолютному значению $c = 40$ кПа. Тогда при $\varphi = 20°$ имеем коэффициент крепости $f \approx 1{,}15$, что соответствует принятым в практике проектирования величинам.

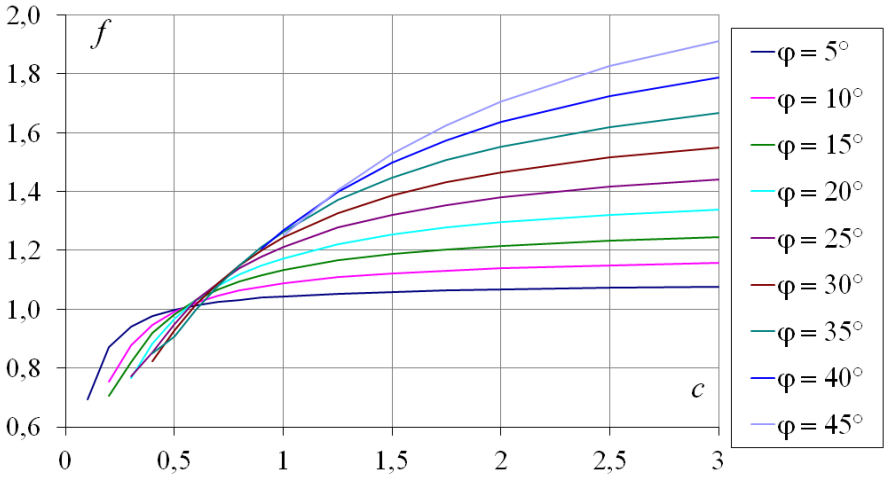


Рисунок 4.12 – Значения коэффициента крепости для дисперсных грунтов ТПР

Вернемся к описанию практической методики.

Крепление калотты. При расчете временной крепи вертикальная нагрузка также определяется по формуле (1.1). Высота свода обрушения будет вычисляться по формуле

$$h = \bar{h}a,$$

где $\bar{h}$ – относительная высота свода обрушения, принимая в зависимости от φ, относительного удельного сцепления $\bar{c} = c/(\gamma a)$ и относительной высоты калотты $\bar{h}_c = h_c/a$ по таблицам Приложения Е.

Выводы по главе 4

1. Выполнено сопоставление аналитических оценок предельной нагрузки, полученных в главе 3, с результатами численного моделирования МПА и МКЭ. Для скальных грунтов показана удовлетворительная, хотя и небеспроблемная, сходимость аналитики с данными МПА, по крайней мере, при $R_c > 2$. МКЭ продемонстрировал нестабильный результат. Для дисперных грунтов также показана хорошая сходимость аналитических решений и данных МПА. МКЭ также дал нестабильный результат, хотя в отдельных случаях его результаты весьма близки к аналитике и МПА. Наложение сеток характеристик на эпюры γ_{max}, построенные МПА, показало хорошее соответствие.

2. Выполнено сопоставление аналитических решений с данными натурных измерений на реальных объектах. С помощью предложенных решений оказалось возможным получить величины напряжений в обделке тоннелей, более близкие к измеренным, чем с помощью нормативной методики. Сам расчет напряжений в обделке тоннелей выполнялся по стандартному алгоритму.

3. Сопоставительные расчеты с нормативными методиками выявили, что предлагаемые решения дают лучшее соответствие со шкалой М.М. Протодьяконова, которая, учитывая ее апробацию, может считаться – конечно, до известной степени – «мерой правильности». На основании выполненного сопоставления в полученные теоретические решения внесены корректировки с целью использования в практической методике.

4. Предложена практическая методика сбора нагрузок от грунта на конструкции подземных сооружений. Общая концепция состоит в том, что рассматриваются четыре основных случая: сбор нагрузок в скальных грунтах, которые оказывают и вертикальное и горизонтальное давление на сооружение, сбор нагрузок в скальных грунтах, которые оказывают только вертикальное давление, сбор нагрузок в дисперсных грунтах на постоянные конструкции и сбор нагрузок в дисперсных грунтах на временную крепь калотты или на конструкции иных сооружений, у которых ширина значительно превышает высоту.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Решена задача о сводообразовании в рамках расчетной схемы Риттера-Стахнёва как задачи вариационного исчисления. Результат решения дан в виде замкнутых формул. Выявлен ряд закономерностей влияния прочностных параметров скального грунта на очертание сводов обрушения и силу предельного давления грунта на подземные сооружения. Дано аналитическое подтверждение равенства коэффициента трения и коэффициента крепости в дисперсных грунтах, которое впервые было установлено М.М. Протодьяконовым другим способом.

2. Сформулирована и решена задача о сводообразовании над криволинейными конструкциями подземных сооружений (например, калотта). Показано, что очертание свода обрушения и распределение нормальных напряжений по контуру свода не зависят от высоты калотты. При этом сила горного давления на крепь уменьшается на величину веса грунта, вынутого при разработке калотты. Установлен ряд других зависимостей силы предельного давления от прочности грунта и высоты калотты.

3. Методом характеристик ТПР решена задача о сводообразовании в дисперсных грунтах. Показан качественно иной характер зависимости высоты свода обрушения над калоттой от высоты калотты. Исследовано влияние прочностных характеристик и высоты калотты на среднее предельное давление грунта на подземное сооружение, его равнодействующую, высоту свода обрушения.

4. Выполнена взаимная верификация результатов аналитических решений и численного моделирования. В задаче о своде в скальных грунтах показано хорошее соответствие аналитических решений с результатами МПА. Расхождение с МПА фиксируется лишь при $R_c < 1…2$. МКЭ демонстрирует неустойчивость решения в этом классе задач. Что касается дисперсных грунтов, то в целом ситуация повторяется – хорошее соответствие аналитики методу предельного анализа (МПА) и нестабильность результатов МКЭ. Отметим, что наложение сеток линий скольжения на эпюры γ_{max}, построенные МПА, также показали хорошее соответствие.

5. Предложена практическая методика сбора нагрузок от грунта на конструкции подземных сооружений. Эта методика была разработана на основе выполненных сопоставлений с численными решениями, с данными натурных исследований на реальных объектах, а также на основе сопоставления с нормативной методикой и шкалой М.М. Протодьяконова. По результатам этих сопоставлений для практического использования в полученные теоретические решения внесены соответствующие поправки. Общая концепция практической методики состоит в том, что рассматриваются четыре основных случая: сбор нагрузок в скальных грунтах, которые оказывают и вертикальное и горизонтальное давление на сооружение, сбор нагрузок в скальных грунтах, которые оказывают только вертикальное давление, сбор нагрузок в дисперсных грунтах на постоянные конструкции и сбор нагрузок в дисперсных грунтах на временную крепь калотты или на конструкции иных сооружений, у которых ширина значительно превышает высоту.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авершин, С.Г.* Сдвижение горных пород при подземных разработках: монография / С.Г. Авершин. – М.: Углетехиздат, 1947. – 247 с.

2. *Анциферов, С.В*. Математическое моделирование взаимодействия массива грунта и обделок тоннелей кругового поперечного сечения, сооружаемых с применением защитного экрана из труб / С. В. Анциферов, О. В. Трещева // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2024. – № 1. – С. 547-561.

3. *Баклашов, И.В*. О постановке задач при оценке устойчивости подземных горных выработок / И.В. Баклашов, В.Г. Хлопцов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2004. – Вып. 4. – С. 69-75.

4. *Баклашов, И.В*. Геомеханика. В 2-х томах : Учебник для вузов / И.В. Баклашов, Б.А. Картозия, А.Н. Шашенко, В.Н. Борисов. – М.: Московский государственный горный университет, 2004. – 259 с.

5. *Баклашов, И.В*. Разработка теории и моделирование процессов сводообразования в окрестности горизонтальной выработки / И.В. Баклашов, В.А. Агеенко // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2015. – Вып. 12. – С. 5-7.

6. *Барон, Л.И.* Коэффициенты крепости горных пород: монография / Л.И. Барон. – М.: Недра, 1972. – 175 с.

7. *Барях, А.А*. К вопросу о напряжённо-деформированном состоянии областей, подверженных карстогенезу / А.А. Барях, Е.П. Русин, С.Б. Стажевский, А.К. Федосеев, Г.Н. Хан // ФТПРПИ. – 2009. – № 6. – С. 3-10.

8. *Березанцев, В.Г.* Оссесиметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды: монография / В.Г. Березанцев. – М.: Гостехиздат, 1953. – 120 с.

9. *Березанцев, В.Г.* Успехи механики грунтов в Советском Союзе / В. Г. Березанцев, М. Н. Гольдштейн, М. И. Горбунов-Посадов, Н. А. Цытович // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1967. – № 5. – С. 5-7.

10. *Башмаков, И.Б.* Влияние воздействия слабых водонасыщенных пылеватоглинистых грунтов на ограждения котлованов с учетом избыточных поровых давлений : Дис. … канд. техн. наук : 2.1.2 / И.Б. Башмаков. – Санкт-Петербург, 2025.

– 174 с.

11. *Богомолов, А.Н.* Предложения по решению некоторых задач о подземных выработках / А. Н. Богомолов, О. А. Богомолова, А. Б. Пономарев // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2025. – № 1(98). – С. 6-20. – DOI 10.35211/18154360_2025_1_6.

12. *Борисов, А.А.* Механика горных пород и массивов: монография / А.А. Борисов. – М.: Недра, 1980. – 360 с.

13. *Бугров, А.К.* Анизотропные грунты и оснований сооружений / А.К. Бугров, А.И. Голубев. – СПб: Недра, 1993. – 245 с.

14. *Булычёв, Н.С.* Механика подземных сооружений: монография / Н.С. Булычёв. – М.: Недра, 1994. – 382 с.

15. *Булычёв, Н.С.* Механика подземных сооружений в примерах и задачах: учебное издание / Н.С. Булычёв. – М.: Недра, 1989. – 271 с.

16. *Бурдин, Т.В.* Постановка и пример решения задачи об активном давлении грунта как задачи вариационного исчисления / Т.В. Бурдин, С.А. Калинин, К.В. Королев, **В.С. Макарова (Королёва)** // В сборнике: Фундаменты глубокого заложения и проблемы геотехники территорий : материалы III Всерос. конф. с междунар. участием (г. Пермь, 29–31 мая 2024 г.) / под общ. ред. В.Г. Офрихтера; ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет». – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2024. – С. 335-345. – EDN GNVPEE.

17. *Виттке, В.* Механика скальных пород. – М.: Недра, 1990. – 439 с.

18. *Волков, В.П.* Тоннели и метрополитены / В.П. Волков, С.Н. Наумов, А.Н. Пирожкова. – М.: Транспорт, 1975. – 551 с.

19. *Галин, Л.А.* Плоская упруго-пластическая задача. / Л.А. Галин. – М.: Журнал ПММ Том X, 1946. – С. 367-385.

20. *Гениев, Г.А.* Динамика пластической и сыпучей сред. / Г.А. Гениев М.И. Эстрин. – М.: Изд-во лит-ры по стр-ву, 1972. – 216 с.

21. *Голицынский, Д.М.* Тоннелестроение. Метростроение / Д. М. Голицынский //

Научные школы Петербургского государственного университета путей сообщения, 1809-2009 : к 200-летию со дня основания Университета / Автор-составитель: Г. Н. Анисимов; под редакцией В. В. Сапожникова. – Санкт-Петербург : Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, 2009. – С. 443-454.

22. *Голушкевич, С.С.* Статика предельных состояний грунтовых масс / С.С. Голушкевич. – М.: Гос. изд-во технико-теор. лит-ры, 1957. – 288 с.

23. *ГОСТ 21153.1-75**. Породы горные. Метод определения коэффициента крепости по Протодьяконову. – М.: Издательство стандартов, 1975. – 3 с.

24. *ГОСТ 21153.8-88*. Породы горные. Метод определения предела прочности при объёмном сжатии. – М.: Издательство стандартов, 1988. – 17 с.

25. *ГОСТ 25100-2020*. Грунты. Классификация. – М.: Стандартинформ, 2020. – 41 с.

26. *Деев, П.В*. Напряжённое состояние анизотропного массива пород в окрестности выработки некругового поперечного сечения / П.В. Деев, К.С. Бабков // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук – 2021. – № 1. – С. 53-59. – DOI 10.15372/FPVGN2021080107.

27. *Деев, П.В*. Оценка напряжённого состояния неоднородного массива пород вблизи горной выработки / П.В. Деев, А.А. Цуканов // Транспортное, горное и строительное машиностроение: наука и производство – 2019. – № 5. – С. 56-59. – DOI 10.26160/2658-3305-2019-5-56-59.

28. *Деев, П.В*. Оценка устойчивости горных выработок, пройденных в анизотропном массиве пород / П.В. Деев, К.С. Бабков // Известия ТулГУ. Науки о Земле – 2021. – № 4. – С. 522-531. – DOI 10.46689/2218-5194-2021-4-1-522-531.

29. *Динник, А.Н*. О давлении горных пород и расчёт крепи круглой шахты // Инженерный работник. – 1925. – №7.

30. *Дорфман, А.Г*. Вариационный метод исследования устойчивости откосов / А. Г. Дорфман // Сб. ДИИТ. Вопросы геотехники. – 1965. – Вып. 9. – С. 17-25.

31. *Дыба, В.П*. Верхняя оценка несущей способности гладкой подпорной стенки Дыба В.П., Балашов А.М. // Современные проблемы фундаментостроения / Сб.

тр. Междунар. науч-техн. конф. – Ч. 3,4. – Волгоград, 2001. – С. 39-42.

32. *Ержанов, Ж.К.* Теория ползучести горных пород и её проявление / Ж.К. Ержанов. – Алма-Аты: Наука, 1964. – 175 с.

33. *Жабко, А.В.* Исследование закономерностей процесса дезинтеграции горных пород на основе теории устойчивости откосов горнотехнических сооружений : Дис. … д-ра техн. наук: 25.00.20 / А.В. Жабко. – 2019. – 331 с.

34. *Заславский, Ю.З.* Исследование проявлений горного давления в капитальных выработках глубоких шахт Донецкого бассейна: монография / Ю.З. Заславский. – М.: Недра, 1966. – 180 с.

35. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 543 с.

36. *Зерцалов, М.Г.* Механика скальных грунтов и скальных массивов: учеб. для ВУЗов / М.Г. Зерцалов. – М.: ИД Юриспруденция, 2003. – 184 с.

37. *Исаков, А.Л.* Исследование вопроса о трещинообразовании при взрыве в пластических средах: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск: Институт горного дела СО АН СССР, 1974. – 88 с.

38. *Калаев, А.И.* Несущая способность оснований сооружений / А.И. Калаев. – Л.: Стройиздат. – 1990. – 184 с.

39. *Караулов, А.М.* Несущая способность оснований осесимметричных фундаментов зданий и сооружений: Дис. … д-ра техн. наук: 05.23.02 / Караулов А.М. – Сакнт-Петербург, 2008. – 291 с.

40. *Караулов, А.М.* К оценке несущей способности грунтовых оснований / А. М. Караулов, К. В. Королев, А. О. Кузнецов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2022. – № 2. – С. 2-8.

41. *Караулов, А.М.* Построение решений статики грунтов методом сопряжения областей предельного равновесия / А.М. Караулов, К.В. Королев // Вестник СГУПС – 2002. – Вып. 4 – С. 124-131.

42. *Картозия, Б.А.* Возникновение самонапряжённого состояния горной породы при разгрузке / Б.А. Картозия, А.И. Мороз // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2001. – № 4. – С. 5-9.

43. *Картозия, Б.А*. Шахтное и подземное строительство: учеб. для ВУЗов Том I – 2-е изд., перераб. и доп.: в 2 т. / Б.А. Картозия, Б.И. Федунец, М.Н. Щуплик и др. – М.: Издательство Академии горных наук, 2001. – 607 с.

44. *Картозия, Б.А*. Шахтное и подземное строительство: учеб. для ВУЗов Том II – 2-е изд., перераб. и доп.: в 2 т. / Б.А. Картозия, Б.И. Федунец, М.Н. Щуплик и др. – М.: Издательство Академии горных наук, 2001. – 582 с.

45. *Королёв, К.В*. Механика грунтов: Учебник в 2-х томах / К.В. Королев, А.М. Караулов. – М.: ФГБОУ ДПО «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2022.

46. *Королёв, К.В*. Об определении предельной нагрузки в упругопластических расчётах грунтовых оснований методом конечных элементов / К.В. Королев, А.М. Караулов // Геотехника: актуальные теоретические и практические проблемы. Межвуз. тем. сб. тр. СПбГАСУ. – Санкт-Петербург: СПбГАСУ, 2007. – С. 102-107.

47. *Королев, К.В*. Плоская задача теории предельного равновесия грунтов: учебное пособие / К.В. Королев. – Новосибирск: Издательство СГУПС, 2010. – 251 с.

48. *Королев, К.В*. Статический анализ устойчивости однородных ненагруженных откосов / К.В. Королев, А.М. Караулов, А.А. Верховская // Геориск. – 2012. – №3. – С. 34-36.

49. *Королев, К.В*. Статическое решение задачи о предельном равновесии свода обрушения в скальных грунтах / К. В. Королев, А. О. Кузнецов, Т. В. Иванова, **В. С. Макарова (Королёва)** // Известия Всероссийского научно-исследовательского института гидротехники им. Б.Е. Веденеева. – 2024. – Т. 313. – С. 90-105. – EDN SHGDWE.

50. *Королев, К.В*. Задача о предельном равновесии свода обрушения над подземными сооружениями криволинейного очертания и ее практическое применение / К.В. Королев, **В.С. Макарова (Королёва)**, А.О. Кузнецов, А.М. Караулов // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. – 2025. – № 1 (73). – С. 77-86. – DOI 10.52170/1815-9265_2025_73_77. – EDN KTXDTS.

51. **Королёва (Макарова), В.С.** Расчет горного давления на криволинейные конструкции подземных сооружений в дисперсных грунтах // Гидроэнергетика. Гидротехника. Новые разработки и технологии: тезисы докладов семнадцатой научно-технической конференции. – Санкт-Петербург: АО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева», 2025. – С. 131-132.

52. *Кузнецов, А.О.* О критических давлениях в плоскости забоя выработки при проходке тоннелей кругового очертания / А. О. Кузнецов, Я. О. Стахнев // Современные методы проектирования, подземного строительства и реконструкции оснований и фундаментов (GFAC 2024) : Сборник тезисов Национальной (всероссийской) научно-технической конференции с международным участием, посвященной 90-летию кафедры геотехники (механики грунтов, оснований и фундаментов, инженерной геологии), Санкт-Петербург, 23–25 октября 2024 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2024. – С. 19.

53. *Кузнецов, А.О.* Методика расчета вертикальных откосов, армированных горизонтальными элементами круглого сечения, на основе решений теории устойчивости грунтов : специальность 05.23.02 "Основания и фундаменты, подземные сооружения" : Дис. … канд. техн. наук / А.О. Кузнецов. – Санкт-Петербург, 2018. – 150 с.

54. *Кузнецов, Г.Н.* Методы и средства решения задач горной геомеханики [Текст] / Г. Н. Кузнецов, К. А. Ардашев, Н. А. Филатов и др. – М.: Недра, 1987. – 248 с.

55. *Кузнецов, С.В.* Деформирование массива горных пород при выемке пологопадающей пластообразной за лежи твердых полезных ископаемых / С. В. Кузнецов, В. А. Трофимов // ФТПРПИ. – 2007. – № 4. – С. 3-24.

56. *Курленя, М.В.* Развитие экспериментально-аналитического метода оценки устойчивости горных выработок / М.В. Курленя, В.Д. Барышников, Л.Н. Гахова // ФТПРПИ. – 2012. – № 4. – С. 20-28.

57. *Лебедев, М.О.* Влияние эксплуатационных нагрузок на изменение напряженно-деформированного состояния обделки транспортного тоннеля / М. О. Ле-

бедев // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2021. – Т. 8. – № 1. – С. 108-114. – DOI 10.15372/FPVGN2021080116.

58. *Лебедев, М.О*. Горно-экологический мониторинг на примере Большого петлевого тоннеля СКЖД / М.О. Лебедев, В.В. Балыкин // Журнал ТАР. – 2006. – № 6. – С. 26–29.

59. *Ледяев, А.П*. Общие вопросы проектирования и строительства транспортных тоннелей : учебное пособие / А. П. Ледяев, Д. М. Голицынский, В. Н. Кавказский. – Санкт-Петербург : Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, 2017. – 72 с.

60. *Либерман, Ю.М*. Давление на крепь капитальных выработок: монография / Ю.М. Либерман. – М.: Наука, 1969. – 119 с.

61. *Лиманов, Ю.А*. Осадки земной поверхности при сооружении городских тоннелей / Ю.А. Лиманов, А.П. Ледяев, И.В. Платонов // Транспортное строительство. – 1980. – № 5. – С. 44-45.

62. *Литвинский, Г.Г*. Механика подземных сооружений // Конспект лекций в 4-х модулях ДонГТУ. – 2013.

63. *Литвинский, Г.Г*. Запредельное поведение пород вокруг горной выработки (порождающее решение) / Г.Г. Литвинский // Сборник научных трудов ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ». – 2017. – №6. – С. 5-14.

64. *Литвинский, Г.Г*. Развитие единой теории прочности и закономерности разрушения / Г.Г. Литвинский // Сборник научных трудов ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ». – 2019. – №13. – С. 5-18.

65. **Макарова (Королёва), В.С.** Решение задачи о сводообразовании в скальных грунтах методом вариационного исчисления / **В.С. Макарова (Королёва)**, К.В. Королев, А.О. Кузнецов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2024. – № 2. – С. 2-8. – EDN CKGAHB.

66. **Макарова (Королёва), В.С**. Определение давления скального грунта на крепь калотты / **В.С. Макарова (Королёва)**, А.О. Кузнецов, К.В. Королев / В сборнике: Гидроэнергетика. Гидротехника. Новые разработки и технологии: тезисы докладов пятнадцатой научно-технической конференции. – Санкт-Петербург:

АО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева», 2023. – С. 104-105.

67. **Макарова (Королёва), В.С.** Решение задачи о равновесии свода обрушения над калоттой в скальных грунтах / **В.С. Макарова (Королёва)** / В сборнике: Использование современных моделей в механике грунтов, геотехнических расчетах и фундаментостроении: материалы 2-й междунар. науч.-техн. конф. памяти профессора Д. М. Шапиро / Отв. ред. М. С. Ким. – Воронеж: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», 2023. – С. 43-47. – EDN MKUHGY.

68. **Макарова (Королёва), В.С**. Практическая методика расчета нагрузки от горного давления на подземные сооружения в скальных и дисперсных грунтах / **В.С. Макарова (Королёва)** // В сборнике: Современные методы проектирования, подземного строительства и реконструкции оснований и фундаментов (GFAC 2024) : Сборник тезисов Национальной (всероссийской) научно-технической конференции с международным участием, посвященной 90-летию кафедры геотехники (механики грунтов, оснований и фундаментов, инженерной геологии) / Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет. – Санкт-Петербург : СПбГАСУ, 2024. – С. 20-21. – EDN FCEZTO.

69. **Макарова (Королёва), В.С.** Вариационное решение задачи о сводообразовании над калоттой в подземных выработках / **В.С. Макарова (Королёва)**, А.О. Кузнецов // В сборнике: Гидроэнергетика. Гидротехника. Новые разработки и технологии : тезисы докладов шестнадцатой научно-технической конференции. – Санкт-Петербург: АО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева», 2024. – С. 150-152.

70. **Макарова (Королёва), В.С.** Об одном варианте решения задачи устойчивости свода обрушения над выработкой как вариационной задачи / **В.С. Макарова (Королёва)**, К.В. Королев, А.О. Кузнецов / В сборнике: Фундаменты глубокого заложения и проблемы геотехники территорий : материалы III Всерос. конф. с междунар. участием (г. Пермь, 29–31 мая 2024 г.) / Под общ. ред. В.Г. Офрихтера; ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет». – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2024. – С. 346-359. – EDN YXENBN.

71. *Малышев, М.В*. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений. 2-е изд., перераб. и доп. / М.В. Малышев. – М.: Стройиздат, 1994. – 228 с.

72. *Малышев, М.В*. Развитие областей предельного состояния грунта в основании квадратного штампа / М.В. Малышев, А.С. Саенков, С.А. Елизаров // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1991. – № 2. – С. 8-14.

73. *Машуков, В.И*. Математическое моделирование условий возникновения шелушения, расслоения и стреляния горных пород / В. И. Машуков // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2024. – Т. 11. – № 4. – С. 12-19. – DOI 10.15372/FPVGN2024110402.

74. *Меркин, В.Е*. Прогрессивный опыт и тенденции развития современного тоннелестроению / В.Е. Меркин, Л.В. Маковский. – М.: Информ.-издат. центр «ТИМР», 1997. – 192 с.

75. *Миренков, В.Е*. Деформирование пород в окрестности выработки на большой глубине / В. Е. Миренков // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2021. – № 3. – С. 24-30. – DOI 10.15372/FTPRPI20210303.

76. *Неверов, С.А*. Обоснование подземных технологий с обрушением руды и вмещающих пород при выемке мощных крутопадающих залежей в условиях роста глубины разработки : специальность 25.00.22 "Геотехнология (подземная, открытая и строительная)" : Дис. … д-ра техн. наук / Неверов С.А. – 2021. – 351 с.

77. *Новоторцев, В.И*. Опыт применения теории пластичности к задачам об определении несущей способности оснований сооружений / В.И. Новоторцев // Известия ВНИИГ. – 1938.

78. *Новоторцев, В.И*. Уточнение формул для расчёта устойчивости оснований сооружений / В.И. Новоторцев // Известия ВНИИГ. – 1938. – т. 24. – С. 201-205.

79. *Опарин, В.Н*. Геомеханический мониторинг временной крепи железнодорожного тоннеля, проходимого в сложных инженерно-геологических условиях / В.Н. Опарин, В.Ф. Юшкин, А.Н. Рублёв, Г.Н. Полянкин, А.Н. Гришин, А.О. Кузнецов // ФТПРПИ. – 2015. – № 4. – С. 174-197.

80. *Панкратенко, А.Н*. Технология комбинированного крепления шахтных стволов в условиях неравномерного тектонического воздействия / А. Н. Панкра-

тенко, И. В. Маркин // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. – 2024. – № 2. – С. 415-424.

81. *Панфилова, Д.В*. Анализ методик расчёта горного давления, возникающего при ведении очистных работ / Д.В. Панфилова, А.В. Ремезов // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2005. – №4-1 (48). – С. 48-52.

82. *Парамонов, В.Н*. Метод конечных элементов при решении нелинейных задач геотехники: Группа компаний «Георекономструкция» / В.Н. Парамонов. – Санкт-Петербург, 2012. – 264 с.

83. *Покровский, Г.И*. Экспериментальное исследование давления грунтов. / Г.И. Покровский // Советский метрополитен. – 1939. – № 10.

84. *Протодьяконов, М.М*. Давление горных пород и рудничное крепление: монография / М.М. Протодьяконов. – М.: Гостехиздат, 1930. – 93 с.

85. *Протодьяконов, М.М*. Давление горных пород на рудничную крепь / М.М. Протодьяконов // Горный журнал. – 1909. – № 8. – С. 80-91.

86. *Протосеня, А.Г*. Механика подземных сооружений. Пространственные модели и мониторинг / А.Г. Протосеня, Ю.Н. Огородников, П.А. Деменков и др. – Санкт-Петербург: СПГГУ, 2011. – 355 с.

87. *Протосеня, А.Г*. Прогноз напряжённого состояния массива на участке сопряжения ствола и горизонтальной выработки / А.Г. Протосеня, Нгуен Ны Бай // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. – 2015. – № 7. – С. 50-55.

88. *Ревуженко, А.Ф*. Линии тока энергии в деформируемом горном массиве, ослабленном эллиптическим отверстиями / А.Ф. Ревуженко, С.В. Клишин // ФТПРПИ. – 2009. – № 3. – С. 3-8.

89. *Ревуженко, А.Ф*. Математические модели упругопластических тел / А.Ф. Ревуженко, А.И. Чанышев, Е.И. Шемякин // Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. – Новосибирск: Наука, 1985. – С. 108-118.

90. *Ремезов, А.В*. Анализ методик расчета горного давления, возникающего при ведении очистных работ / А. В. Ремезов, Д. В. Панфилова, А. И. Жаров // Рекуль-

тивация выработанного пространства: проблемы и перспективы : Сборник статей III международной научно-практической Интернет-конференции, Белово, 11–18 декабря 2017 года. – Белово: КузГТУ; Филиал КузГТУ в г. Белово; Изд-во Новосибирского филиала ФГБНУ "Госрыбцентр" ; Изд-во Шуменского университета им. Епископа Константина Преславского, 2018. – С. 13.1-13.10.

91. *Руппенейт, К.В*. Некоторые вопросы механики горных пород: монография / К.В. Руппенейт. – М.: Углетехиздат, 1954. – 384 с.

92. *Руппенейт, К.В*. Механические свойства горных пород: монография / К.В. Руппенейт – М.: Углетехиздат, 1956. – 324 с.

93. *Савин, Г.Н*. Влияние крепления на распределение напряжений возле узких подземных выработок. Давление горных пород на крепь вертикальных шахт. – Записки Института горной механики АН УССР. – 1947. – № 5.

94. *Савин, Г.Н*. Распределение напряжений около отверстий: монография / Г.Н. Савин – Киев: Наукова Думка, 1968. – 891 с.

95. *Саммаль, А.С*. Оценка устойчивости пород вокруг горных выработок при тектонических и сейсмических воздействиях / А.С. Саммаль, Н.Н. Фотиева, П.В. Деев // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2003. – № 5. – С. 186-189.

96. *Серяков, В.М*. К расчёту напряжённо-деформированного состояния массива горных пород над выработанным пространством / В.М. Серяков // ФТПРПИ – 2009. – № 5. – С. 13-20.

97. *Серяков, В.М*. Об одном способе учёта реологических свойств горных пород при расчёте напряжённо-деформированного состояния массива в зоне подработки / В.М. Серяков // ФТПРПИ – 2010. – № 6. – С. 18-24.

98. *Слесарёв, В.Д*. Механика горных пород и рудничное крепление: монография / В.Д. Слесарёв – М.: Углетезиздат, 1948. – 303 с.

99. *СНиП 32-04-97*. Тоннели железнодорожные и автодорожные. – М.: Издание официальное, 1998. – 26 с.

100. *СНиП II Д.9-1954*. Нормы строительного проектирования. Часть II. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954.

– 23 с.

101. *СНиП II Д.8-1962*. Тоннели железнодорожные и автодорожные. – М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительные материалам, 1962. – 17 с.

102. *СНиП II-44-78*. Тоннели железнодорожные и автодорожные. – М.: Госстрой СССР, 1978. – 23 с.

103. *Соболевский, Ю.А*. Водонасыщенные откосы и основания / Соболевский Ю.А. – Минск: Высшая школа, 1975. – 400 с.

104. *Соколовский, В.В*. Статика сыпучей среды: монография / В.В. Соколовский. – М.: Наука, 1990. – 270 с.

105. *Соловьев, Ю.И*. Несущая способность предельно напряженного основания под ленточным фундаментом // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1979. – №4. – С. 21-23.

106. *Соловьев, Ю.И*. Жестко- и упругопластический анализ устойчивости и напряженно-деформированного состояния грунтов : Автореф. дис. ... д-ра техн. наук в форме научного доклада. – М., 1989. – 65 с.

107. *СП 102.13330.2012*. Туннели гидротехнические. Актуализированная редакция СНиП 2.06.09-84. – М.: Минрегион России, 2012. – 48 с.

108. *СП 120.13330.2012*. Метрополитены. Актуализированная редакция СНиП 32-02-2003. – М.: Минрегион России, 2012. – 269 с.

109. *СП 120.13330.2022*. Метрополитены. Актуализированная редакция СНиП 32-02-2003. – М.: Минстрой России, 2022. – 313 с.

110. *СП 122.13330.2012*. Тоннели железнодорожные и автодорожные. Актуализированная редакция СНиП 32-04-97. – М.: Минрегион России, 2012. – 133 с.

111. *СП 122.13330.2023*. Тоннели железнодорожные и автодорожные. Актуализированная редакция СНиП 32-04-97. – М.: Минстрой России, 2023. – 109 с.

112. *Ставницер, Л.Р*. О подобии решений теории предельного равновесия для связных грунтов / Л.Р. Ставницер // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1984. – №1. – С. 27-30.

113. *Ставницер, Л.Р*. Расчёт оползневого давления грунта с учётом сейсмиче-

ских воздействий / Л.Р. Ставницер // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1987. – № 3. – С. 121-124.

114. *Ставницер, Л.Р.* Сейсмостойкость оснований и фундаментов / Л.Р. Ставницер. – М.: Изд-во АСВ, 2010. – 448 с.

115. *Стажевский, С.Б.* Об изменениях напряженно-деформированногосостояния месторождений полезных ископаемых / С. Б. Стажевский, Г. Н. Хан // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2017. – Т. 4. – № 2. – С. 157-162.

116. *Стахнев, Я.О.* Методика определения нагрузки от горного давления на подземные сооружения при сводообразовании в зависимости от прочности грунтов : Дис. … канд. техн. наук / Я.О. Стахнев. – Санкт-Петербург, 2023. – 152 с.

117. *Строганов, А.С.* Некоторые проблемы теории пластичности грунтов : Автореф. дис. ... д-ра техн. наук / А.С. Строганов. – М., 1968. – 39 с.

118. *Строганов, А.С.* Несущая способность пластически неоднородного основания, ограниченного жёстким подстилающим слоем / А.С. Строганов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1974. – №6. – С. 2-8.

119. *Строганов, А.С.* Приближенный аналитический метод расчёта несущей способности оснований и его экспериментальная оценка / А.С. Строганов, М.С. Гайдай, А.З. Тиц, А.С. Снарский, А.В. Вронский // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1983. – № 1. – С. 19-23.

120. *Ухов, С.Б.* Расчёт сооружений и оснований методом конечных элементов / С.Б. Ухов. – М.: МИСИ, 1973. – 118 с.

121. *Фадеев, А.Б.* Метод конечных элементов в геомеханике / А.Б. Фадеев. – М.: Недра, 1987. – 221 с.

122. *Федоровский, В.Г.* Несущая способность сыпучего основания ленточного фундамента при действии наклонной внецентренной нагрузки / В.Г. Федоровский // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2005. – № 4. – С. 2-7.

123. *Феннер, Р.* Исследование горного давления. – Сб. переводов «Горное давление». – М.: Госгортехиздат, 1961.

124. *Фисенко, Г.Л.* Предельные состояния горных пород вокруг выработок / Г.Л. Фисенко. – М.: Недра, 1976. – 272 с.

125. *Флорин, В.А*. Основы механики грунтов. – Т. 1, 2. – М.-Л.: Госстройиздат, 1961.

126. *Фотиева, Н.Н*. Расчёт обделок тоннелей мелкого заложения на сейсмические воздействия / Н.Н. Фотиева, Н.В. Шелепов // Горный информационно-аналитический бюллетень – 2000. – № 3. – С. 26-30.

127. *Фрейдин, А.М*. Геомеханическая оценка горнотехнической ситуации на золоторудном месторождении «Макмал» / А.М. Фрейдин, С.А. Неверов, А.А. Неверов // ФТПРПИ – 2009. – № 5. – С. 75-85.

128. *Фрейдин, А.М*. Устойчивость горных выработок при системах подэтажного обрушения / А.М. Фрейдин, С.А. Неверов, А.А. Неверов, П.А. Филиппов // ФТПРПИ – 2008. – № 1. – С. 90-100.

129. *Фролов, Ю.С*. Метрополитены. Учебник для вузов / Ю.С. Фролов, Д.М. Голицынский, А.П. Ледяев. – М.: Желдориздат, 2001. – 528 с.

130. *Фролов, Ю.С*. Механика подземных сооружений / Ю.С. Фролов, Т.В. Иванес. – Санкт-Петербург: ФГБОУ ВПО ПГУПС, 2014. – 125 с.

131. *Фролов, Ю.С*. Решение задач геомеханики при строительстве автотранспортных тоннелей в олимпийском Сочи / Ю.С. Фролов, Т.В. Иванес, В.Н. Кавказский, А.Н. Коньков // Транспорт Российской Федерации. – 2013. – № 6. – С. 12-18.

132. *Харр, М.Е*. Основы теоретической механики грунтов / Харр М.Е. – М.: Стройиздат, 1971. – 320 с.

133. *Хилл, Р*. Математическая теория пластичности / Хилл Р. М. – М.: Гостехиздат, 1956. – 407 с.

134. *Храпов, В.Г*. Тоннели и метрополитены: учебник для вузов / В.Г. Храпов, Е.А. Демешко, С.Н. Наумов и др.; под ред. В.Г. Храпова. – М.: Транспорт, 1989. – 383 с.

135. *Цимбаревич, П.М*. Механика горных пород: монография / П.М. Цимбаревич. – М.: Углетехиздат, 1948. – 184 с.

136. *Чанышев, А.И*. Два случая запредельного деформирования массива пород вокруг горной выработки / А.И. Чанышев, И.М. Абдулин // ИНТЕРЭКСПО ГЕО-

СИБИРЬ. – 2019. – Т. 2. – № 5. – С. 81-88. – DOI 10.33764/2618-981X-2019-2-5-81-88.

137. *Чанышев, А.И.* Деформационная теория разрушения горных пород и её анализ / А.И. Чанышев, И.М. Абдулин // ИНТЕРЭКСПО ГЕО-СИБИРЬ. – 2018. – Т. 6 – С. 257-265. – DOI 10.18303/2618-981X-2018-6-257-265.

138. *Чанышев, А.И.* Характеристики и соотношения на характеристиках на запредельной стадии деформирования горных пород / А.И. Чанышев, И.М. Абдулин // ФТПРПИ – 2008. – № 5. – С. 27-41.

139. *Чанышев, А.И.* Определение напряженно-деформированного состояния массива пород вокруг цилиндрической выработки по данным измерений смещений на ее контуре / А. И. Чанышев, И. М. Абдулин, Л. В. Городилов // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2025. – № 3. – С. 80-94. – DOI 10.25018/0236_1493_2025_3_0_80.

140. *Черников, А.К.* Решение жёсткопластических задач геомеханики методом характеристик: учебное пособие / А.К. Черников. – Санкт-Петербург: ПГУПС, 1997. – 192 с.

141. *Шашенко, А.Н.* Численное моделирование упруго-пластического состояния породного массива вокруг горизонтальной выработки / А. Н. Шашенко, С. Н. Гапеев, А. В. Солодянкин // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. – 2009. – № 4. – С. 89-94.

142. *Шашкин, К.Г.* Численное моделирование задач предельного равновесия с помощью упругопластической модели / К. Г. Шашкин, В. А. Шашкин, М. В. Дунаева // Геотехника. – 2011. – № 4. – С. 10-23.

143. *Шемякин, Е.И.* Механика горного массива / Е. И. Шемякин // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2006. – № 3. – С. 5-17. – EDN HZODYL.

144. *Эльсгольц, Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление (Серия: «Курс высшей математики и математической физики»). – М.: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 424 с.

145. *Balla, A.* (1962). Bearing capacity of foundation. // Journ. of the soil mech. Div.

PASCE, oct., 1962. – p.29-36.

146. *Biarez, J*. (1962). Contribution à l'étude des proprietés mécaniques des sols et des materiaux pulvérulents: Thèses de Doctorat es Sciences, Grenoble.

147. *Biarez, J., Le Gall, Y., Nègre, R., Stutz, P*. (1967). Calcul de l'équilibre limité des fondations peu profondes de revolution, C. R. Acad. Sci., 265, Serie A, Paris.

148. *Bishop, A.* (1955). The use of the slip circle in the stability analysis of slopes. – Geotechnique. 1955, vol.5,№1. – p.7-17.

149. *Brinch Hansen, J*. (1961). A general formula for bearing capacity // Geotekn.Inst.Bull. №11, Copengagen, 1961. – p.11-15

150. *Chen, W.F. & Baladi, G.Y.* (1985) Soil plasticity. Amsterdam. 231 p.

151. *Coulomb, C.A.* (1773). Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture // Mem. Acad. Roy. Div. Sav. Vol. 7. pp 343-387.

152. *Cox, A.D.* (1962). Axially-symmetric plastic deformation in soils — II. Indentation of ponderable soils. Int. J. Mech. Sci., Vol. 4, pp 371-380.

153. *Cox, A.D., Eason, G. & Hopkins, H.G*. (1961). Axially symmetric plastic deformation in soils. Proc. R. Soc. London (Ser. A), Vol. 254, pp 1-45.

154. *Hoek, E. & Brown, E.T.* Practical estimates of rock mass strength. In: International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. Vol 34, № 8, 1997, pp. 1165-1186.

155. *Haar, A., Karman, T.* Zur Theory der Spannungszustande in plastishen Medien - Nachr.Kgl.ges.Wiss.Gott.Math.-phys.Kl.1909, №2. – s. 204-218.

156. *Hencky, H*. (1923). Uber einige statisch bestimmte Falle des Gleichgewichts in plastischen Korpern. Zeit. angew. Math. Mech., Vol. 3, pp. 241-251.

157. *Josselin de Jong* (1958). The undefiniteness in kinematic for friction materials. Proc. Conf. Earth Pressure Probl., Brussels., 1958, p.55-70.

158. *Ketter, F*. (1903). Bestimmung des Druckes an gekrummten Gleitflachen, eine Aufgabe aus der Zehre von Erddruck, Berlin, 1903. – 126 s.

159. *Ketter, F*. (1888) Uber das Problem der Erddruckbestimmung. Verh. dtsch. phys. Ges., Berlin, H. 7, s. 1-8.

160. *Labasse, H*. (1950). Les pressions de terrains autour d'une taille chassante. Revue

Universelle des Mines, Tome VII, 1950, Nº 3.

161. *Li, A.J., Merifield, R.S., Lyamin, A.V.* (2009). Limit analysis solutions for three dimensional undrained slopes. Computers and Geotechnics, Volume 36, Issue 8, pp 1330-1351.

162. *Lundgren, H. & Mortensen, K.* (1953). Determination by the theory of plasticity of the bearing capacity of continuous footings on sand. Proc. 3rd Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Zurich, Vol. 1, pp. 409-412.

163. *Lyamin, A.V. & Sloan, S.W.* (2002). Lower bound limit analysis using non-linear programming. Int. J. Numer. Meth. Engng. No 55, pp. 573-611.

164. *Lyamin, A.V. & Sloan, S.W.* (2002). Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., No 26, pp. 181-216.

165. ***Makarova (Koroleva), V.S.**, Korolev, K.V., Kuznetsov, A.O.* (2024). Variational solutions for the problem of arching in rock soils. Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2024. Vol. 61 (2). pp 91-98. – DOI 10.1007/s11204-024-09948-w. – EDN EYWXUH.

166. *Mandel, J.* (1964). Conditions de stabilite et postulat de Drucker. In Rheology and soil mechanics symposium, Grenoble, Berlin, p. 58-68

167. *Martin, C.M.* (2005). Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics. In Proc. 11th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics, Volume 4, pp 441-450, Turin, Italy.

168. *Meyerhof, G.G.* (1951). The Ultimate Bearing Capacity of Foundations // Geotechnique, №2. 1951.

169. *Prandtl, L.* (1920). Uber die Harte plastisher Korper. Gottingen Nachrichten, 1920, p. 340-350.

170. *Protodyakonov, M.M.* (1970). Rational methods of planning experiments / M. M. Protodyakonov, R. I. Teder // 12th U.S. Symposium on Rock Mechanics, USRMS 1970 : 12, Rolla, MO. – Rolla, MO, 1970. – P. 129-149.

171. *Rankine, W.* (1857). On the stability of loose earth. London. Phil.Trans., 1857. - 125 s.

172. *Reissner, H.* (1925). Zum Erddruckproblem. Proceedings of the first International

Congress for applied mechanics. Delft, 1925.

173. *Ritter, W*. (1879). Die Statik der Tunnelgewolde. Berlin, 1879.

174. *Salençon, J. & Matar, M*. (1982). Bearing capacity of circular shallow foundations. In Foundation engineering (ed. G. Pilot), pp 159-168. Paris: Presses de l'ENPC.

175. *Shield, R.T*. (1953). Mixed Boundary Value Problems in Soil Mechanics. Quarterly of Applied Mathematics, 1953, Vol. 11, No. 1, pp. 61-75.

176. *Vesic, A.S*. (1975). Bearing Capacity of Shallow Foundations // Hsai-Jang Fang. Foundation Engineering Handbook. – New York, 1975.

177. *Wang, R., Deng X., Meng Y., et al*. (2020). Application of Ultrasonic-Rebound Method in Fast Prediction of Rock Strength // Geotechnical and Geological Engineering. International Journal. 2020. Vol. 38. P. 5916-5924. – DOI 10.1007/s10706-020-01402-6.

178. *Han Z., Zou W., Ying, H*. (2023). A semi-empirical approach for estimating the lateral earth pressure on rigid retaining walls with EPS inclusions in cohesionless soils // Transportation Geotechnics. 2023. Vol. 39.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Свод в скальных грунтах: результаты аналитических решений

Таблица А.1 – Сила *P* предельного давления грунта на конструкции подземных сооружений при $\gamma = 1$ и $a = 1$ для исходных данных (2.36)

R_c	В. Риттер	Я.О. Стахнёв	Эйлер – 1	Эйлер – 2	Эйлер – 3
0,0001	16670	–	–	174652	175933
0,001	1667	–	–	9321	9389
0,005	333,3	–	–	1202	1211
0,0075	222,2	–	–	717,4	722,6
0,01	166,7	–	–	497,4	501,1
0,025	66,67	–	–	155,0	156,1
0,05	33,32	–	–	64,13	64,60
0,075	22,21	–	–	38,27	38,55
0,1	16,65	–	–	26,53	26,72
0,25	6,617	–	–	8,220	8,281
0,5	3,233	–	–	3,323	3,348
0,75	2,072	–	–	1,893	1,908
1	1,467	–	–	1,217	1,227
1,2	1,149	–	–	0,8830	0,8915
1,4	0,9105	–	–	0,6430	0,6499
1,6	0,7217	–	–	0,4590	0,4646
1,8	0,5659	–	–	0,3100	0,3154
2	0,4333	–	–	0,1860	0,1906
3	-0,0444	-0,0190	–	-0,2500	-0,2475
4	-0,3833	-0,4680	-0,442	-0,5570	-0,5556
5	-0,6667	-0,7610	-0,756	-0,8170	-0,8160
6	-0,9222	-1,013	-1,011	-1,055	-1,054
7	-1,162	-1,247	-1,245	-1,281	-1,280
8	-1,392	-1,470	-1,467	-1,500	-1,499
9	-1,615	-1,688	-1,685	-1,714	-1,713
10	-1,833	-1,901	-1,897	-1,924	-1,924
12	-2,261	-2,321	-2,314	-2,340	-2,340
15	-2,889	-2,939	-2,926	-2,955	-2,955
20	-3,917	-3,957	-3,934	-3,969	-3,968
25	-4,933	-4,967	-4,941	-4,976	-4,976
30	-5,944	-5,973	-5,935	-5,981	-5,981
40	-7,958	-7,981	-7,909	-7,987	-7,987
50	-9,967	-9,985	-9,871	-9,990	-9,990
70	-13,98	-13,99	-13,78	-13,99	-13,99
100	-19,98	-19,99	-19,51	-20,00	-20,00
200	-39,99	-40,00	-38,08	-40,00	-40,00
500	-100,0	-100,00	-88,47	-100,0	-100,00
750	-150,0	-150,0	–	-150,0	-150,0
1000	-200,0	-200,0	–	-200,0	-200,0

Таблица А.2 – Высота h свода обрушения при $\gamma = 1$ и $a = 1$ для исходных данных (2.36)

R_c	В. Риттер	Я.О. Стахнёв	Эйлер – 1	Эйлер – 2	Эйлер – 3
0,0001	25000	–	–	297702	287890
0,001	2500	–	–	15887	15364
0,005	500,0	–	–	2049	1981
0,0075	333,3	–	–	1223	1182
0,01	250,0	–	–	847,9	819,9
0,025	100,0	–	–	264,2	255,4
0,05	50,00	–	–	109,3	105,7
0,075	33,33	–	–	65,25	63,10
0,1	25,00	–	–	45,25	43,76
0,25	10,00	–	–	14,10	13,63
0,5	5,000	–	–	5,834	5,642
0,75	3,333	–	–	3,482	3,368
1	2,500	–	–	2,415	2,335
1,2	2,083	–	–	1,915	1,852
1,4	1,786	–	–	1,574	1,522
1,6	1,563	–	–	1,328	1,284
1,8	1,389	–	–	1,143	1,105
2	1,250	–	–	0,9994	0,9665
3	0,8333	1,599	–	0,5965	0,5769
4	0,6250	0,6423	0,8400	0,4136	0,4000
5	0,5000	0,4278	0,4233	0,3114	0,3011
6	0,4167	0,3239	0,3163	0,2469	0,2388
7	0,3571	0,2610	0,2542	0,2029	0,1962
8	0,3125	0,2184	0,2127	0,1712	0,1656
9	0,2778	0,1876	0,1826	0,1474	0,1425
10	0,2500	0,1641	0,1598	0,1289	0,1246
12	0,2083	0,1308	0,1275	0,1022	0,0988
15	0,1667	0,0996	0,0971	0,0769	0,0744
20	0,1250	0,0705	0,0688	0,0533	0,0516
25	0,1000	0,0540	0,0527	0,0402	0,0388
30	0,0833	0,0435	0,0425	0,0318	0,0308
40	0,0625	0,0310	0,0303	0,0221	0,0213
50	0,0500	0,0238	0,0233	0,0166	0,0161
70	0,0357	0,0160	0,0157	0,0108	0,0105
100	0,0250	0,0106	0,0103	0,0069	0,0067
200	0,0125	0,0047	0,0046	0,0029	0,0028
500	0,0050	0,0016	0,0016	0,0009	0,0009
750	0,0033	0,0010	–	0,0005	0,0005
1000	0,0025	-0,0005	–	0,0004	0,0004

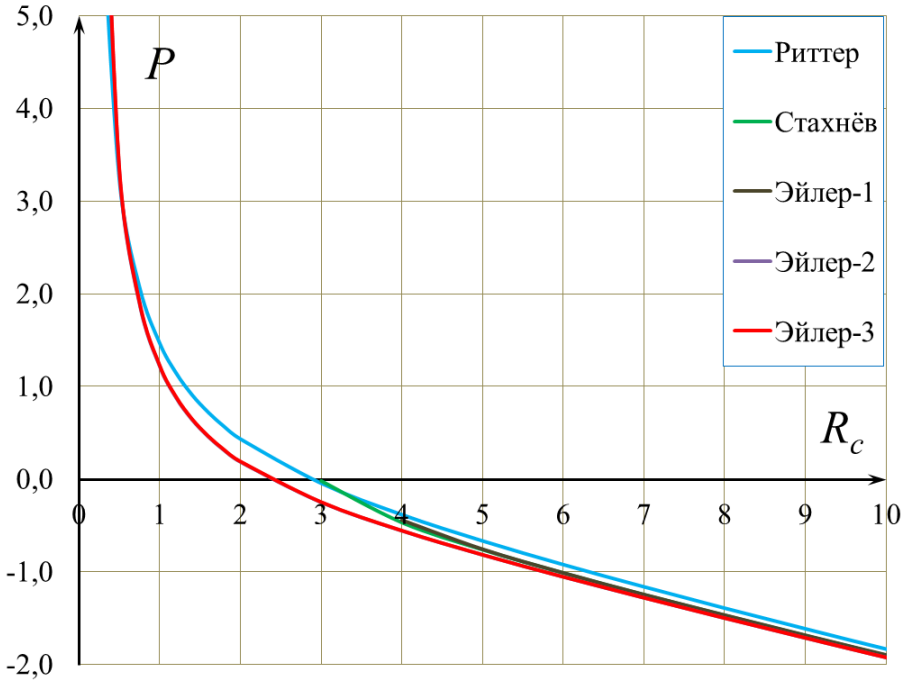


Рисунок А.1 – Сопоставительные графики зависимостей $P(R_c)$

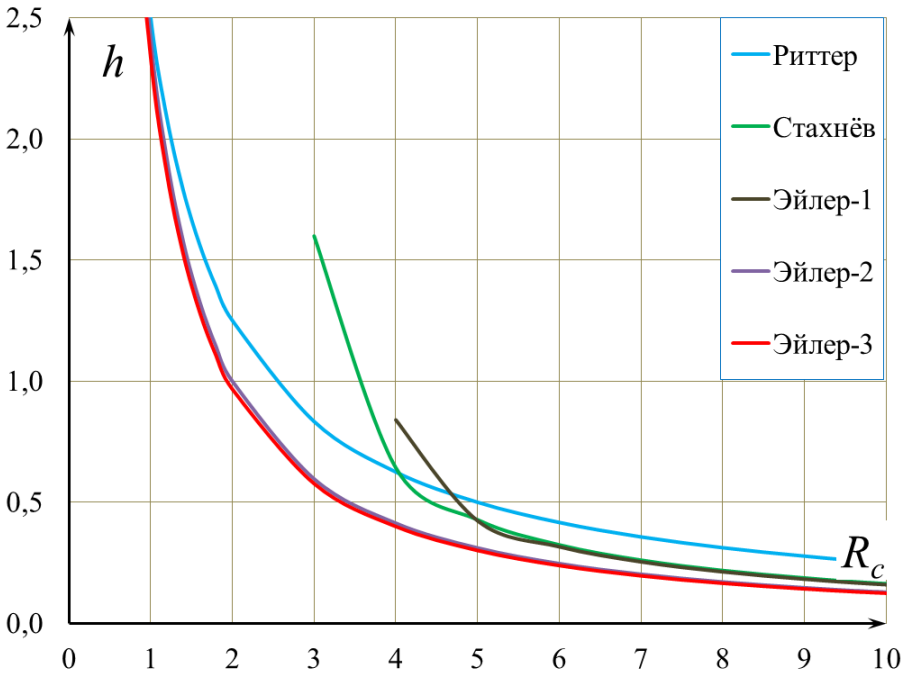


Рисунок А.2 – Сопоставительные графики зависимостей $h(R_c)$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Свод в скальных грунтах: влияние параметра *M*

Исходные данные, принятые для построения графиков, приведленных в настоящем приложении, описаны в п. 2.8.

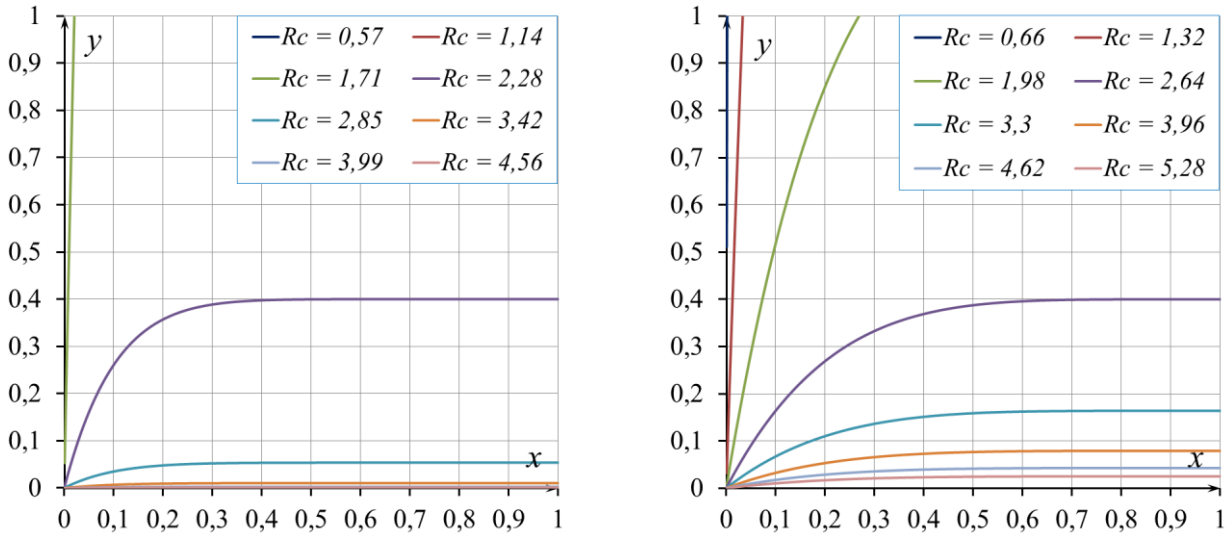


Рисунок Б.1 – Графики функции $y(x)$ при $m = 0{,}1$ (слева) и при $m = 0{,}2$ (справа)

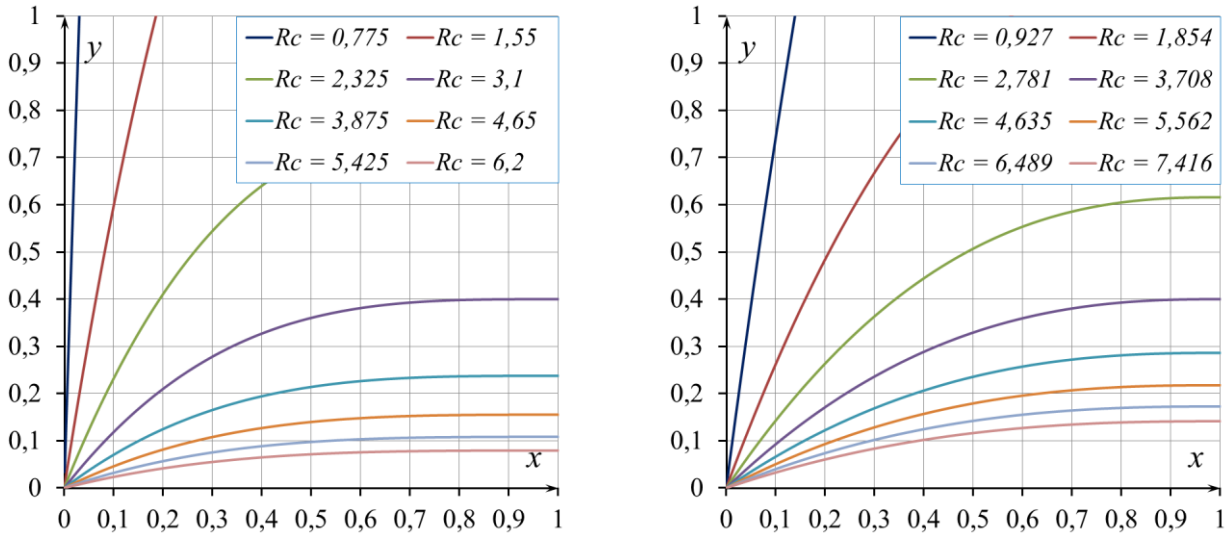


Рисунок Б.2 – Графики функции $y(x)$ при $m = 0{,}3$ (слева) и при $m = 0{,}4$ (справа)

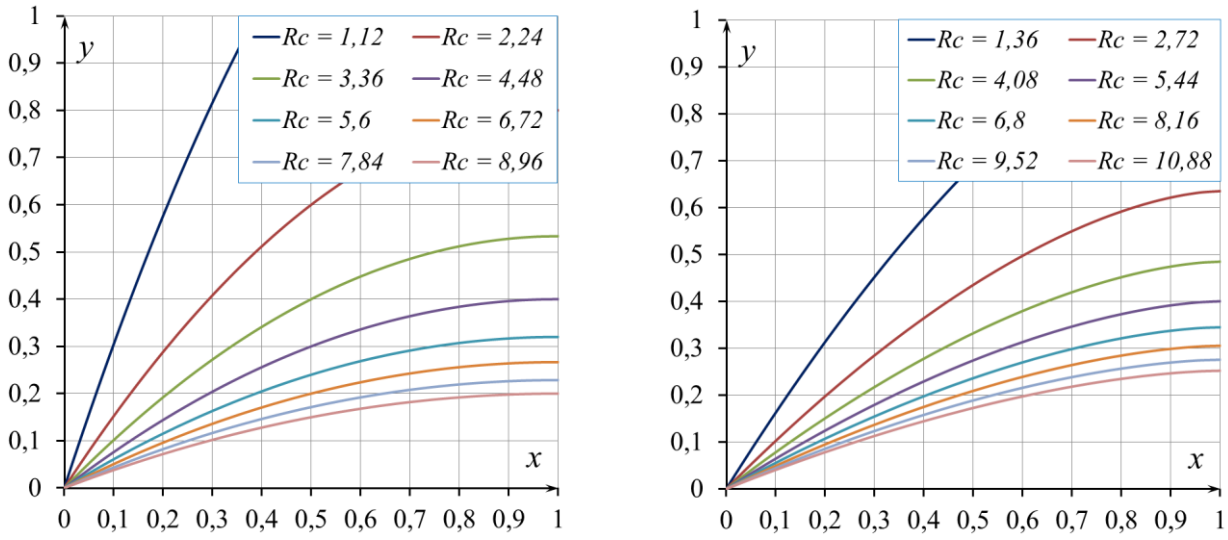


Рисунок Б.3 – Графики функции $y(x)$ при $m = 0{,}5$ (слева) и при $m = 0{,}6$ (справа)

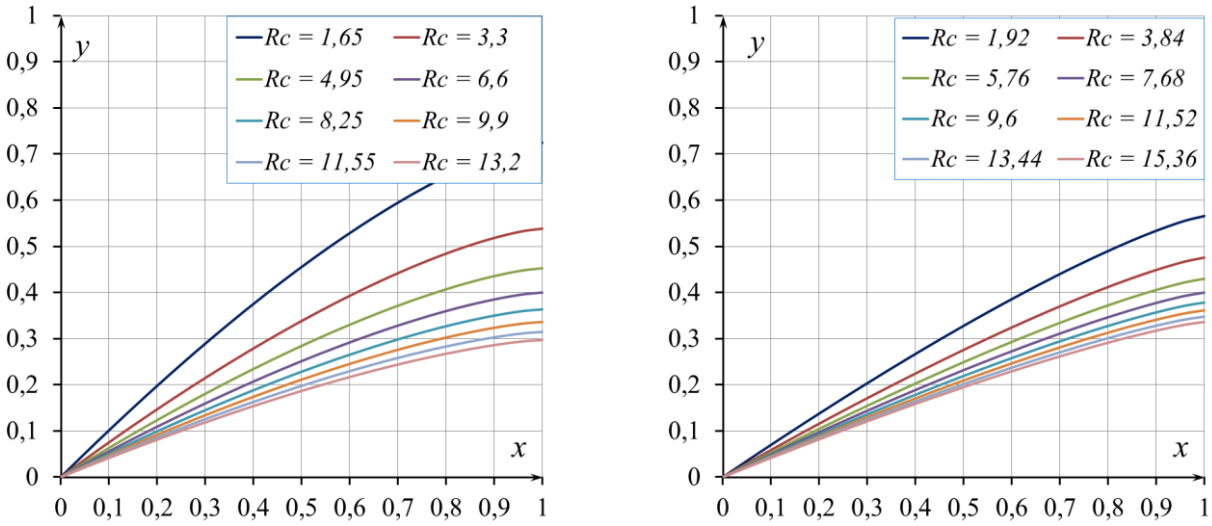


Рисунок Б.4 – Графики функции $y(x)$ при $m = 0{,}7$ (слева) и при $m = 0{,}8$ (справа)

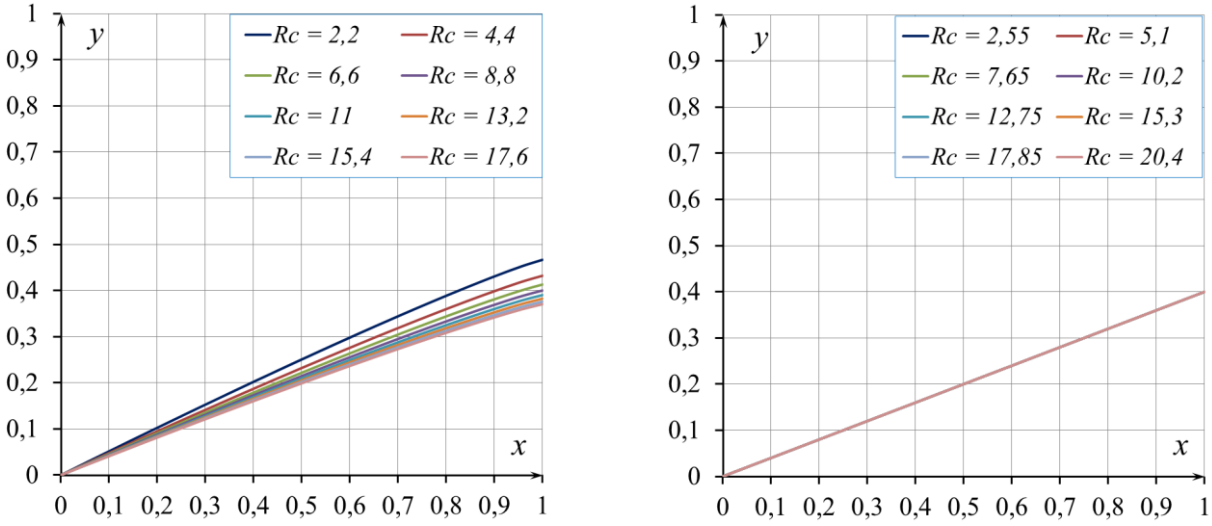


Рисунок Б.5 – Графики функции $y(x)$ при $m = 0{,}9$ (слева) и при $m = 1{,}0$ (справа)

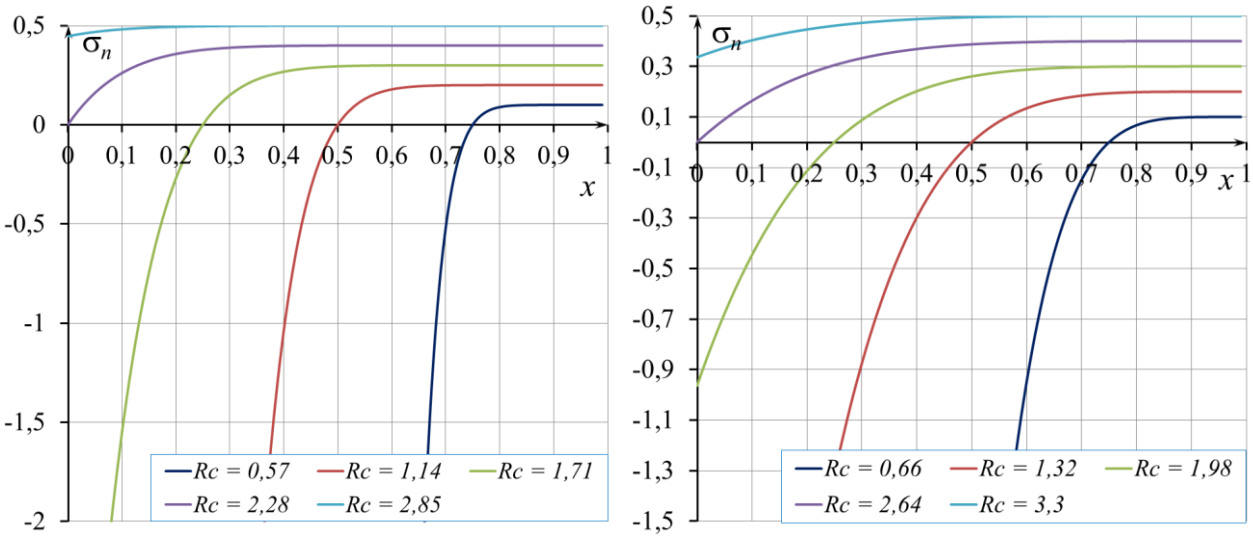


Рисунок Б.6 – Графики функции $\sigma_n(x)$ при $m = 0{,}1$ (слева) и при $m = 0{,}2$ (справа)

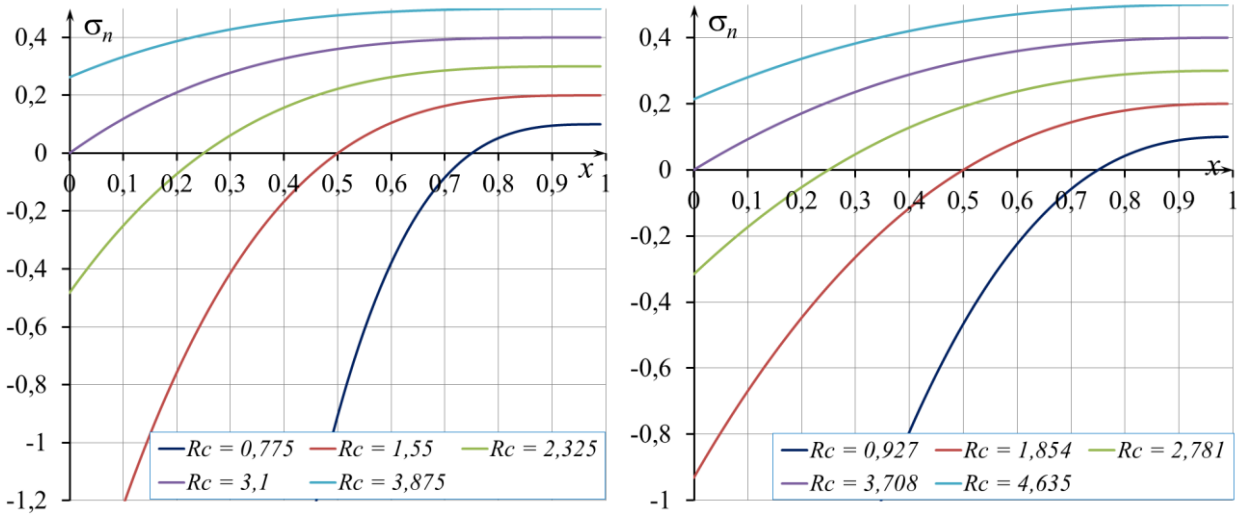


Рисунок Б.7 – Графики функции $\sigma_n(x)$ при $m = 0{,}3$ (слева) и при $m = 0{,}4$ (справа)

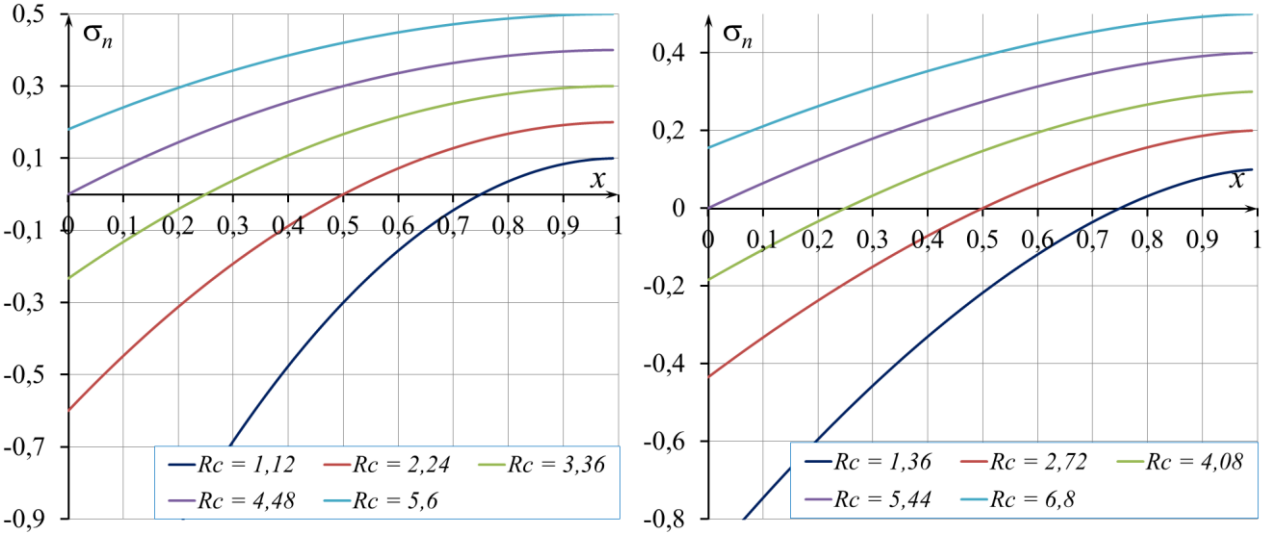


Рисунок Б.8 – Графики функции $\sigma_n(x)$ при $m = 0{,}5$ (слева) и при $m = 0{,}6$ (справа)

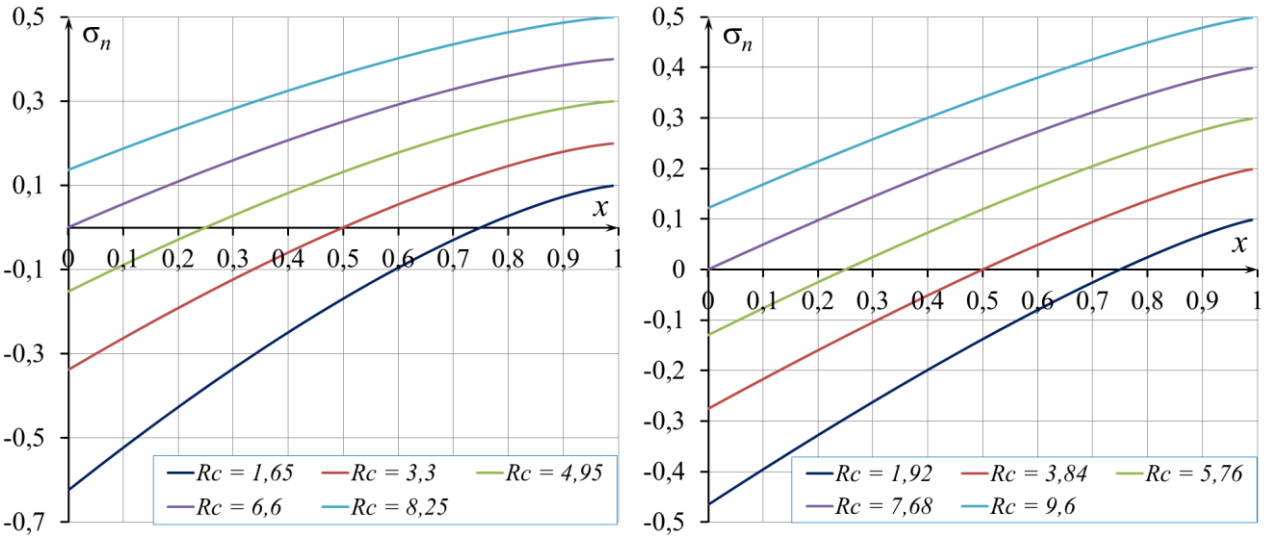


Рисунок Б.9 – Графики функции $\sigma_n(x)$ при $m = 0{,}7$ (слева) и при $m = 0{,}8$ (справа)

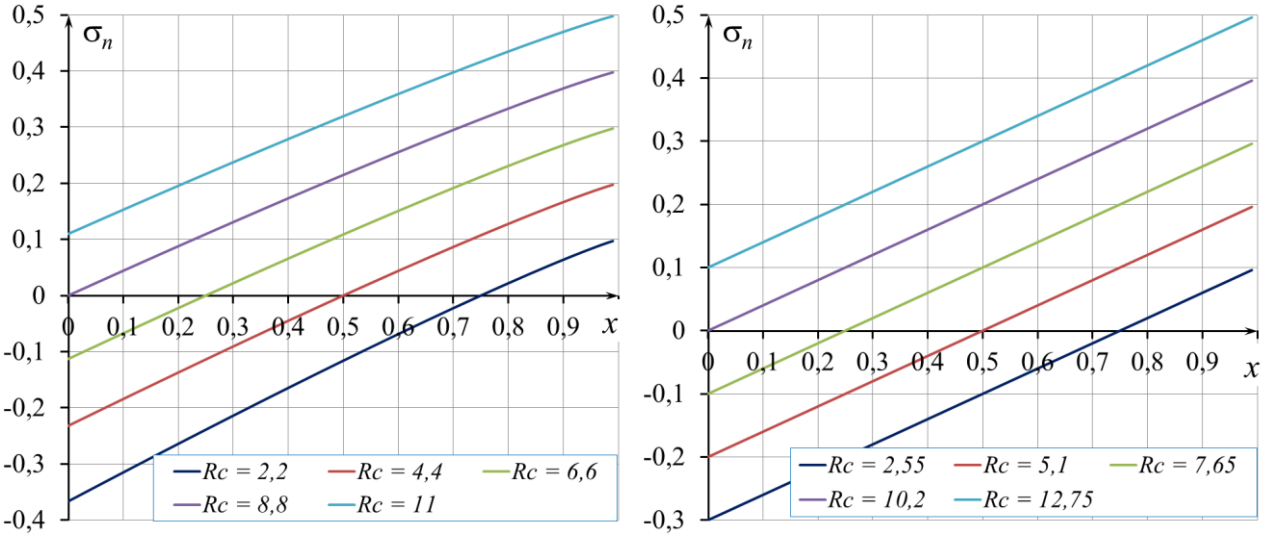


Рисунок Б.10 – Графики функции $\sigma_n(x)$ при $m = 0{,}9$ (слева) и при $m = 1{,}0$ (справа)

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Свод над калоттой в скальных грунтах: графики функции $P(R_c, h_c, m)$

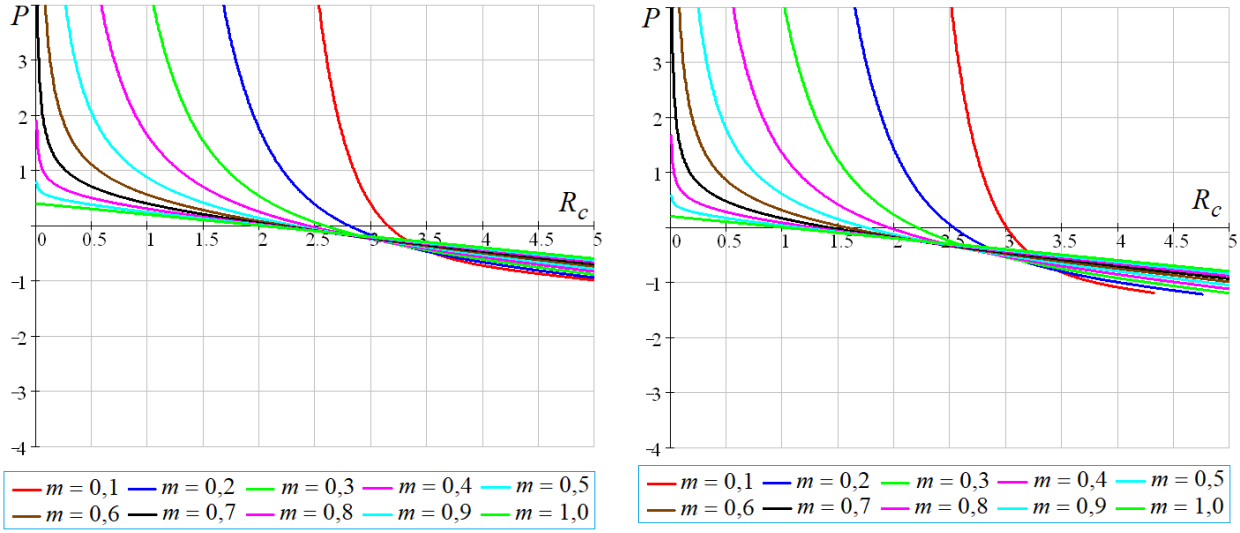


Рисунок В.1 – Функция $P(R_c)$ при $h_c = 0$ (слева) и при $h_c = 0{,}2$ (справа) для различных m

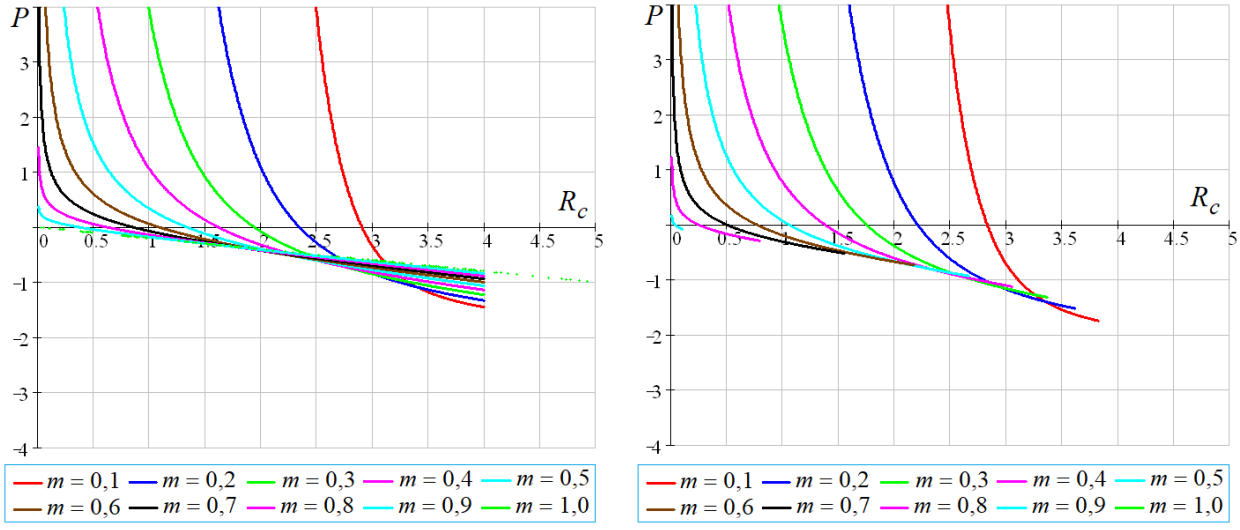


Рисунок В.2 – Функция $P(R_c)$ при $h_c = 0{,}4$ (слева) и при $h_c = 0{,}6$ (справа) для различных m

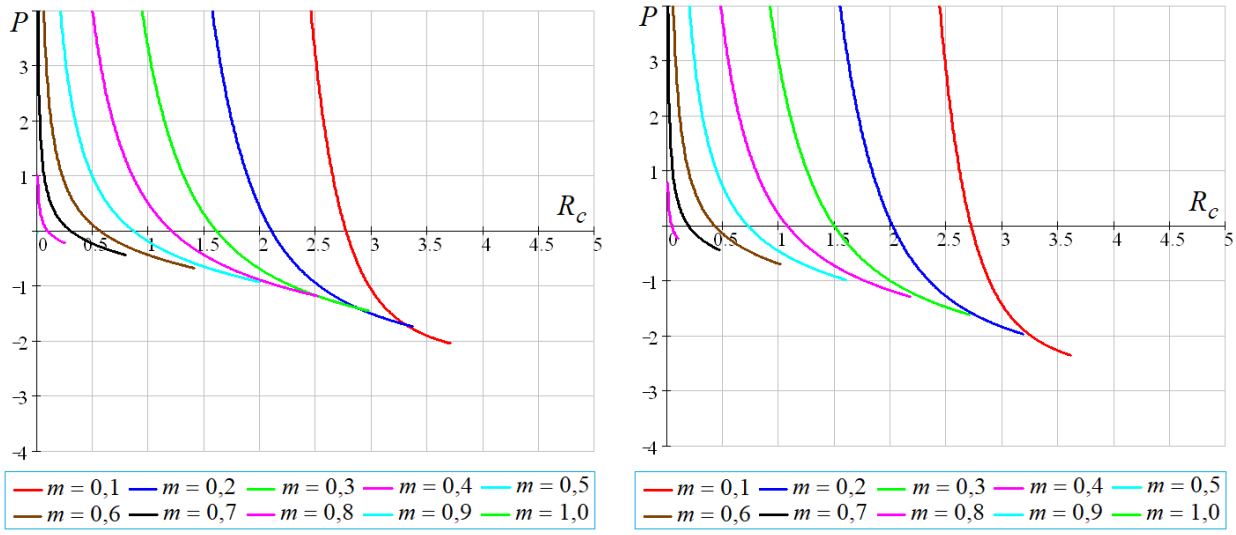


Рисунок В.3 – Функция $P(R_c)$ при $h_c = 0{,}8$ (слева) и при $h_c = 1{,}0$ (справа) для различных m

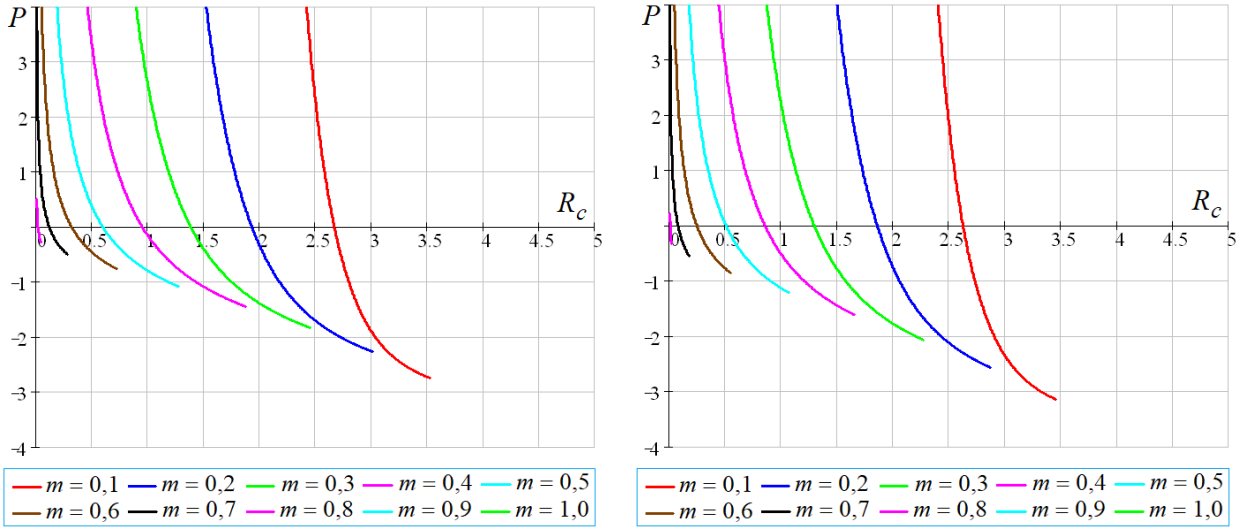


Рисунок В.4 – Функция $P(R_c)$ при $h_c = 1{,}25$ (слева) и при $h_c = 1{,}5$ (справа) для различных m

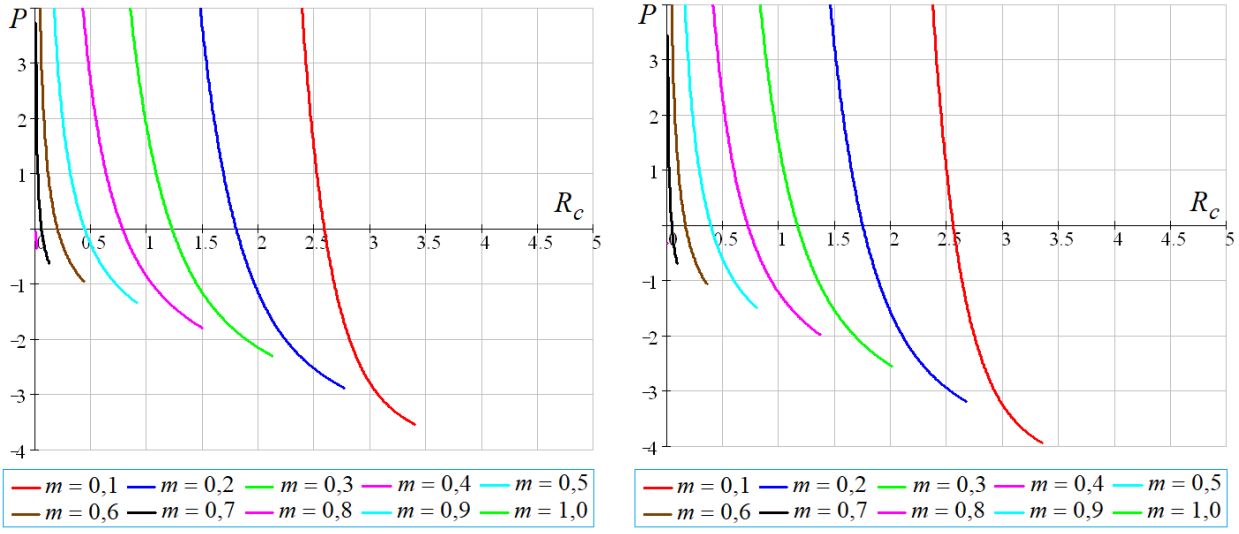


Рисунок В.5 – Функция $P(R_c)$ при $h_c = 1{,}75$ (слева) и при $h_c = 2{,}0$ (справа) для различных m

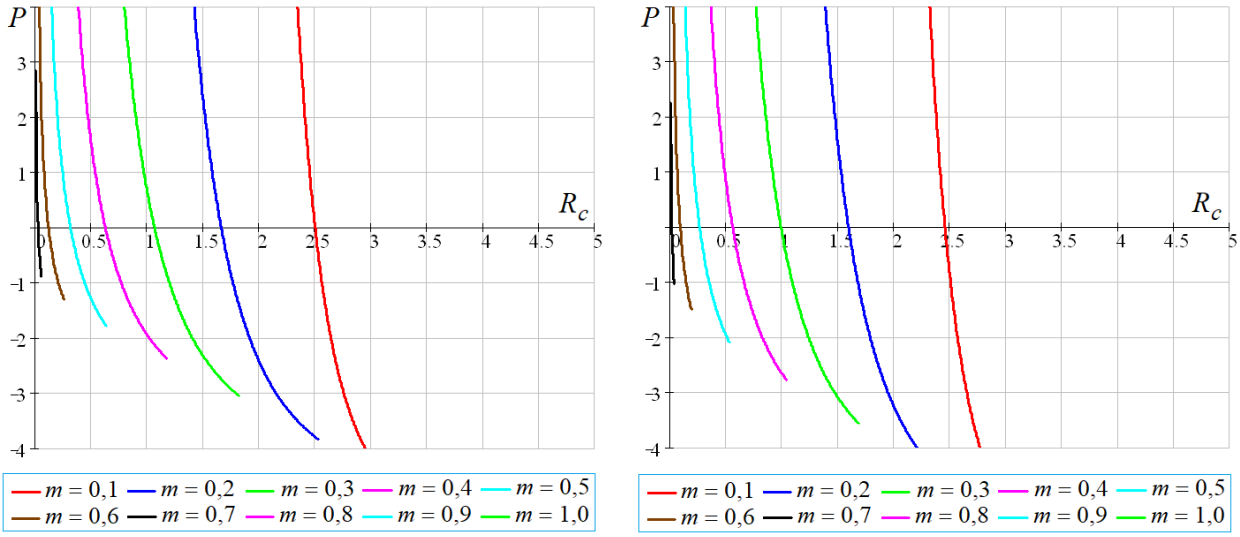


Рисунок В.6 – Функция $P(R_c)$ при $h_c = 2{,}5$ (слева) и при $h_c = 3{,}0$ (справа) для различных m

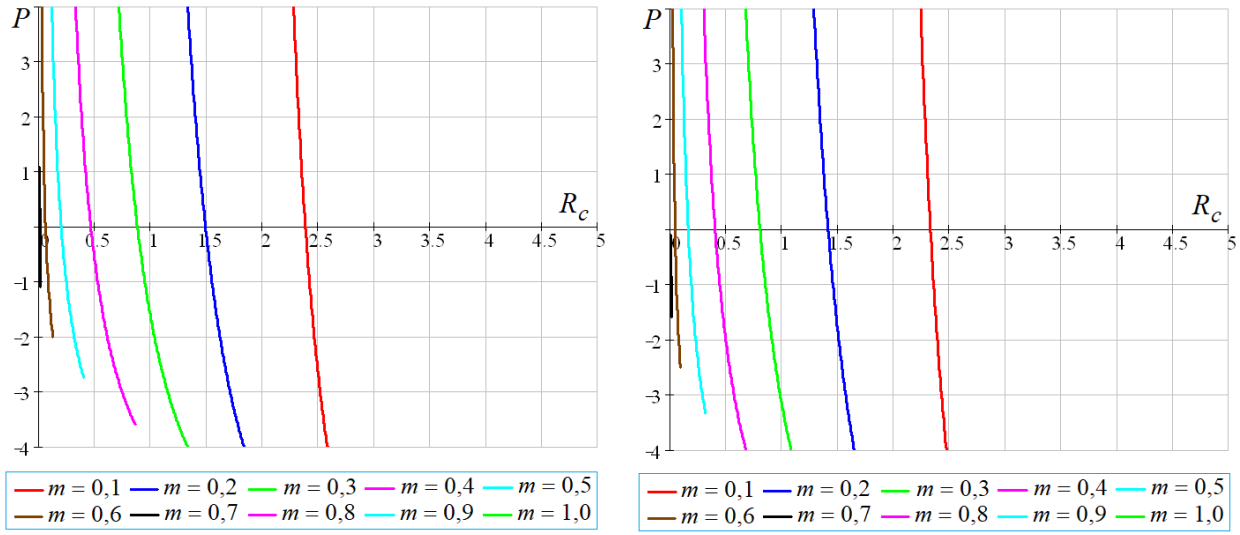


Рисунок В.7 – Функция $P(R_c)$ при $h_c = 4{,}0$ (слева) и при $h_c = 5{,}0$ (справа) для различных m

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Свод над калоттой в скальных грунтах: графики функций $P(R_c)$ и $P(h_c)$

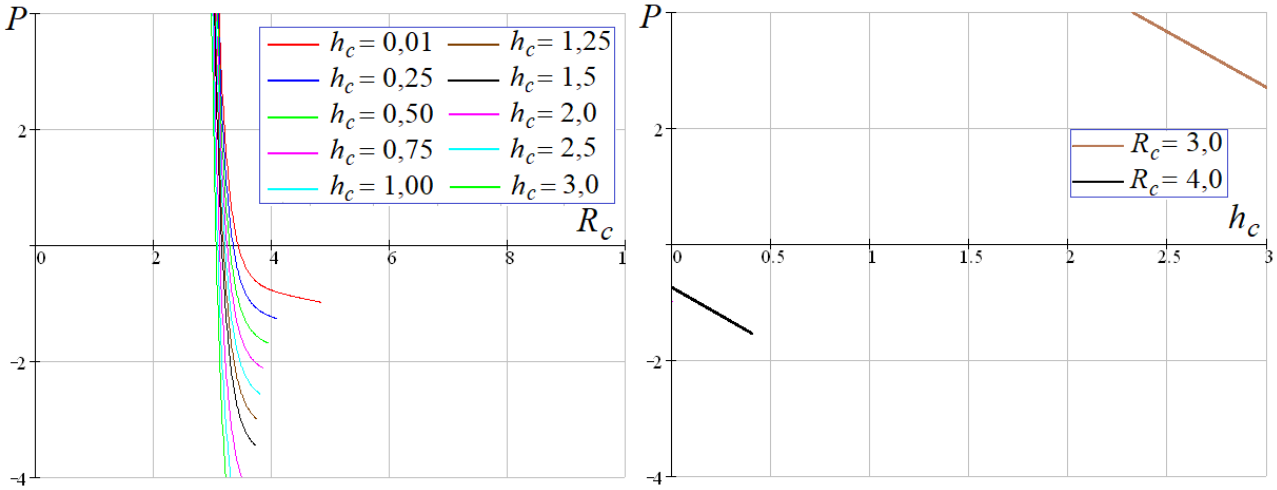


Рисунок Г.1 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при m = 0,05: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

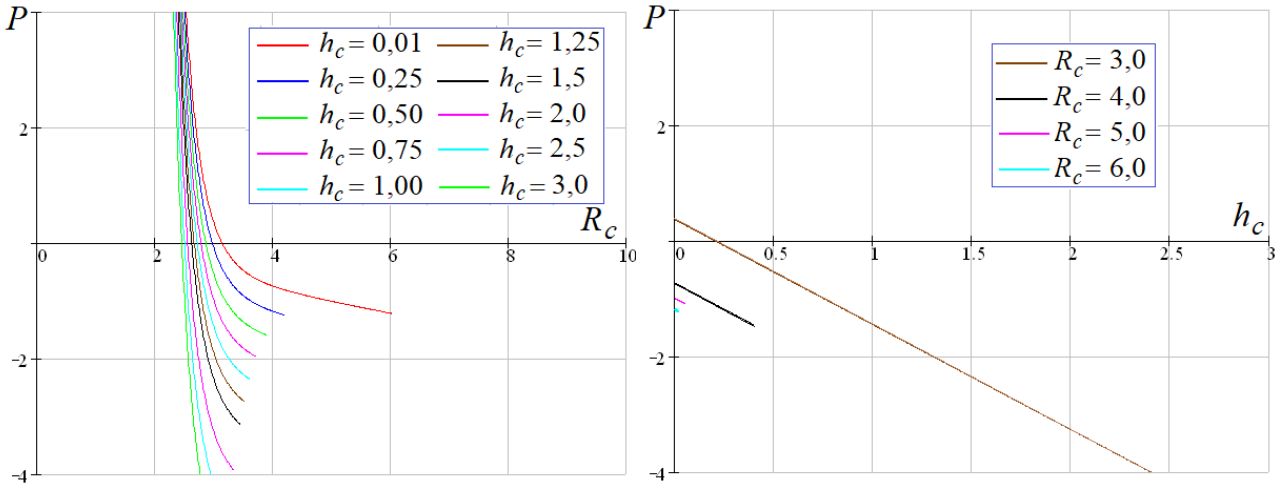


Рисунок Г.2 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при m = 0,10: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

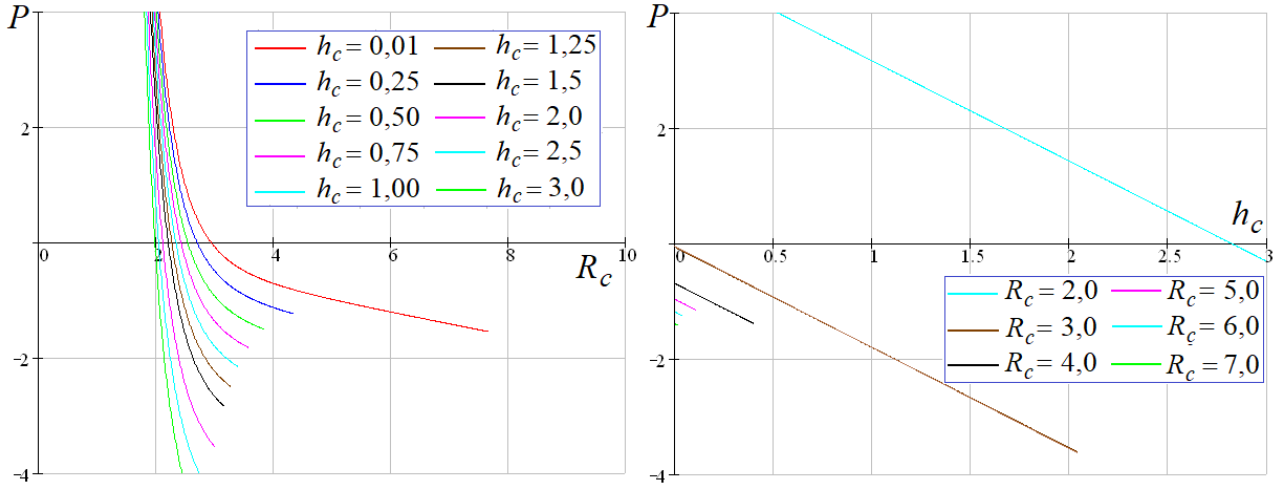


Рисунок Г.3 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при m = 0,15: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

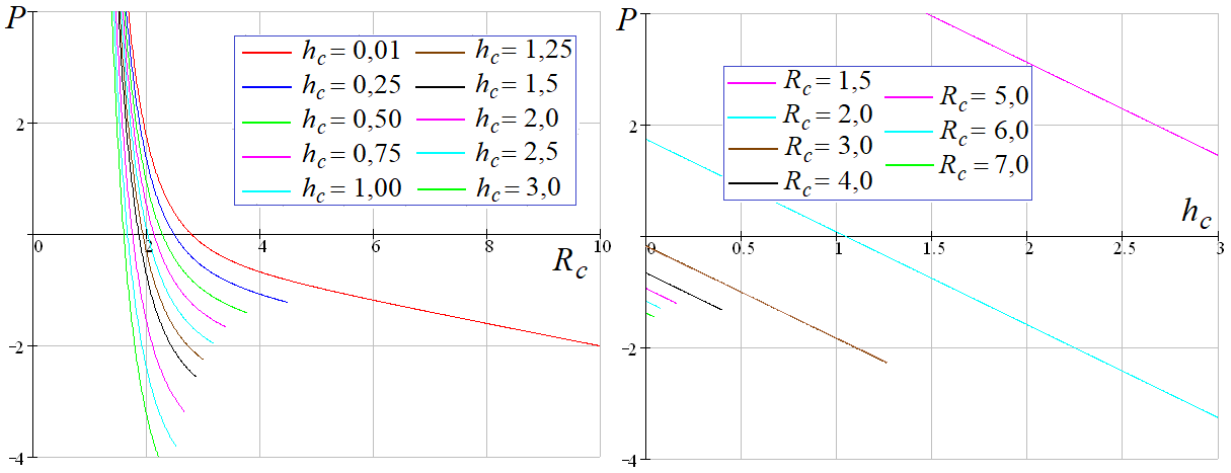


Рисунок Г.4 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}20$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

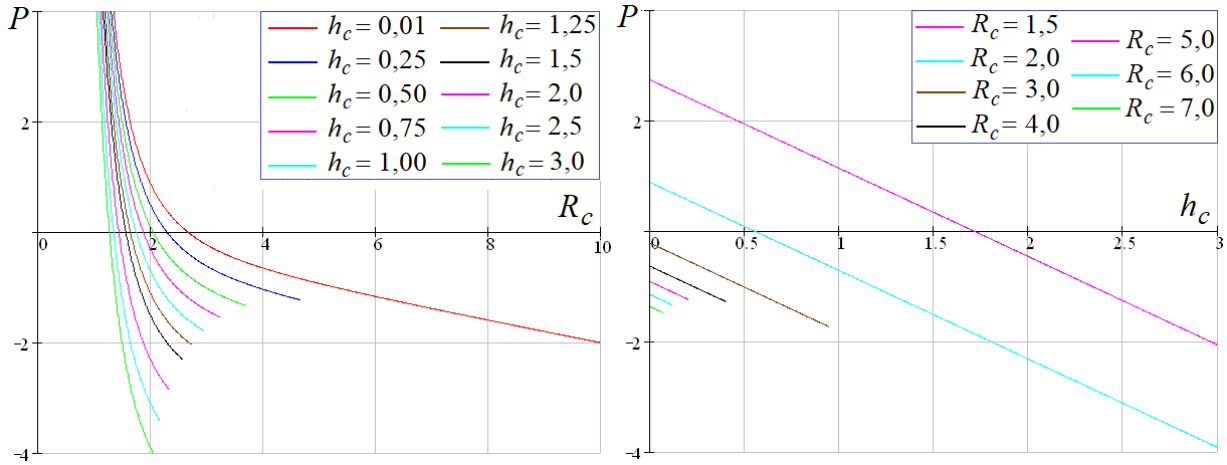


Рисунок Г.5 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}25$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

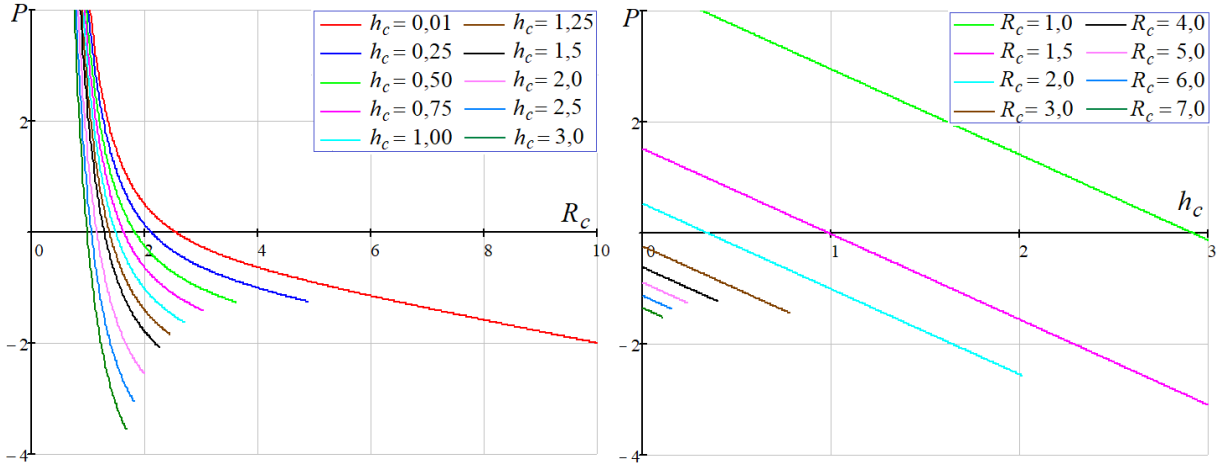


Рисунок Г.6 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}30$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

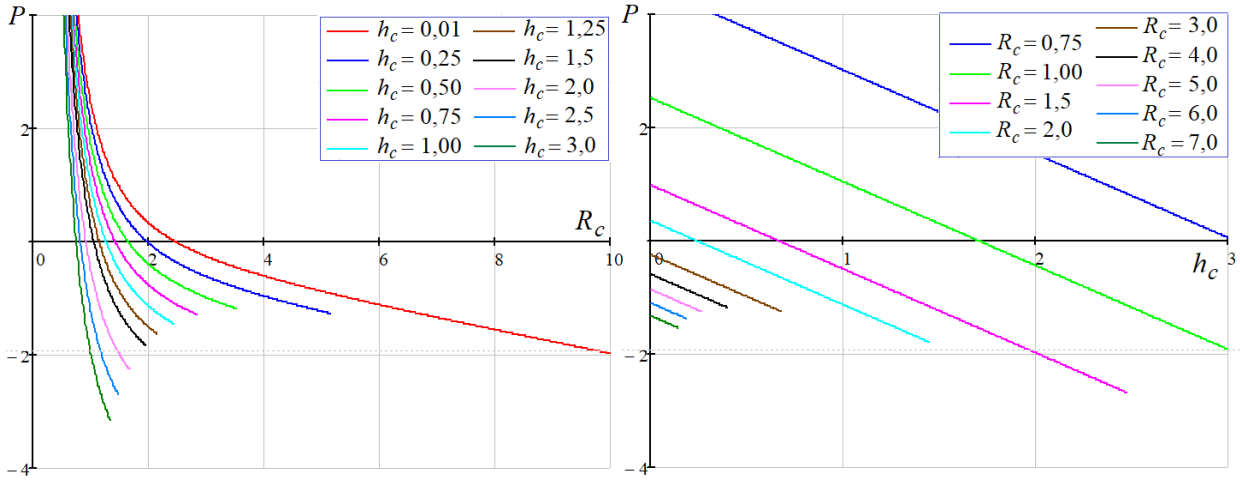


Рисунок Г.7 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}35$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

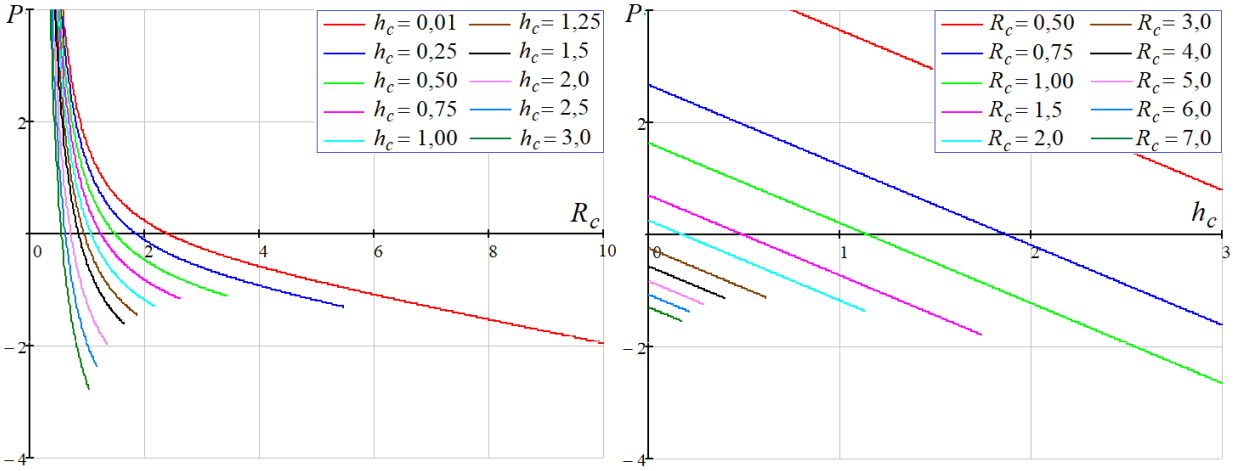


Рисунок Г.8 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}40$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

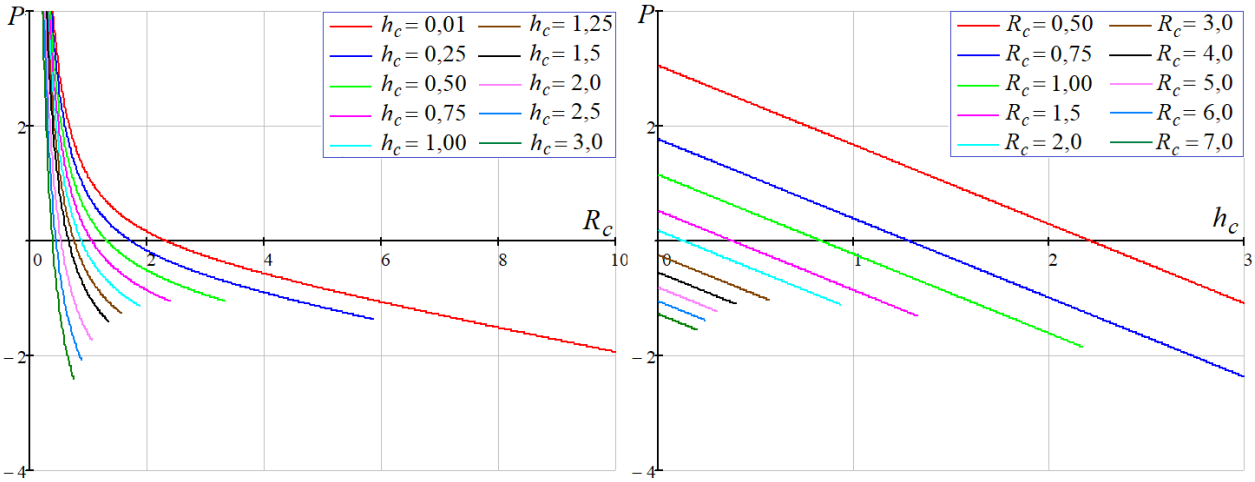


Рисунок Г.9 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}45$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

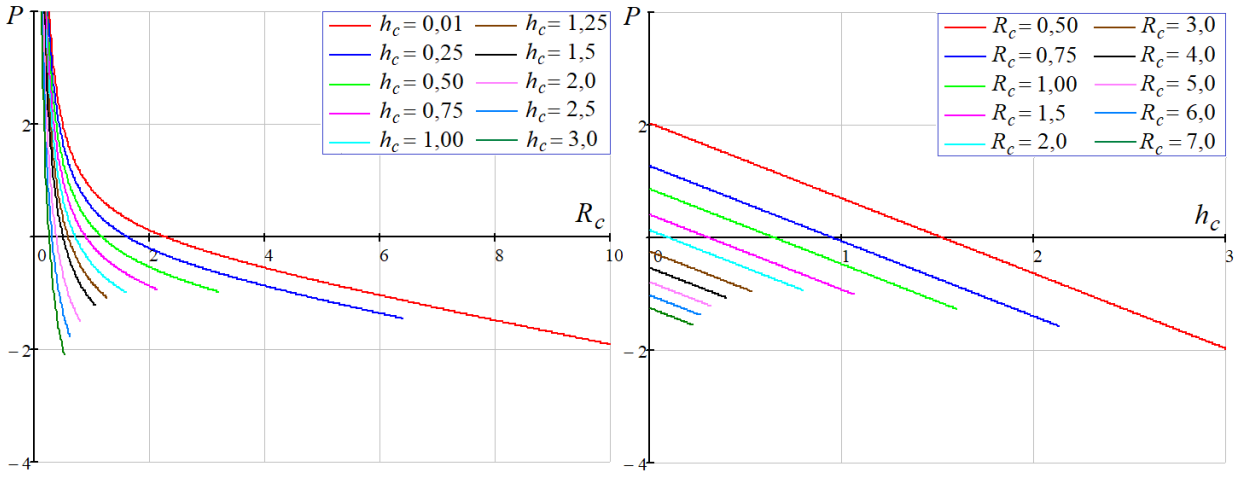


Рисунок Г.10 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}50$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

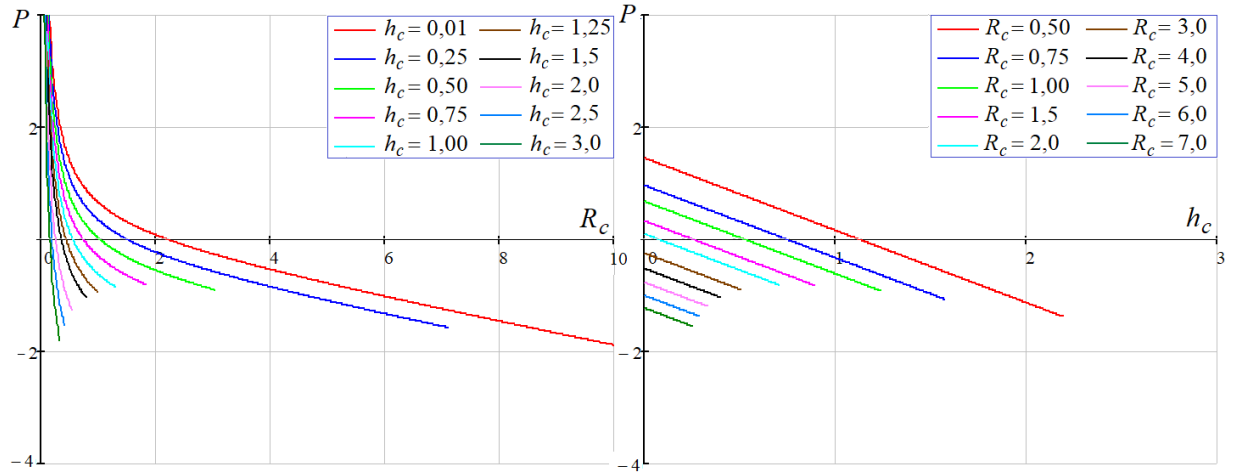


Рисунок Г.11 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}55$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

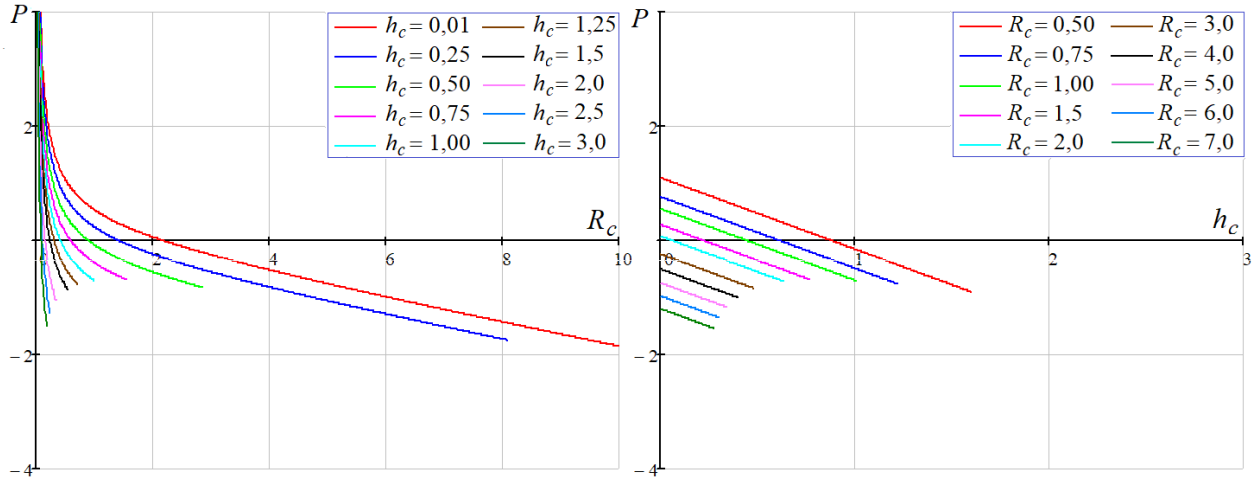


Рисунок Г.12 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}60$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

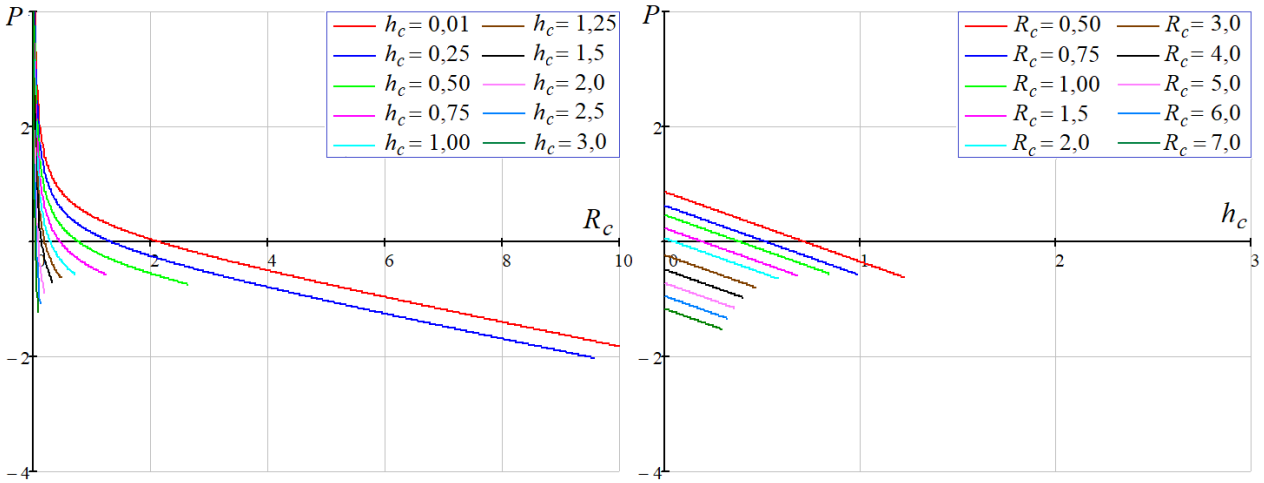


Рисунок Г.13 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}65$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

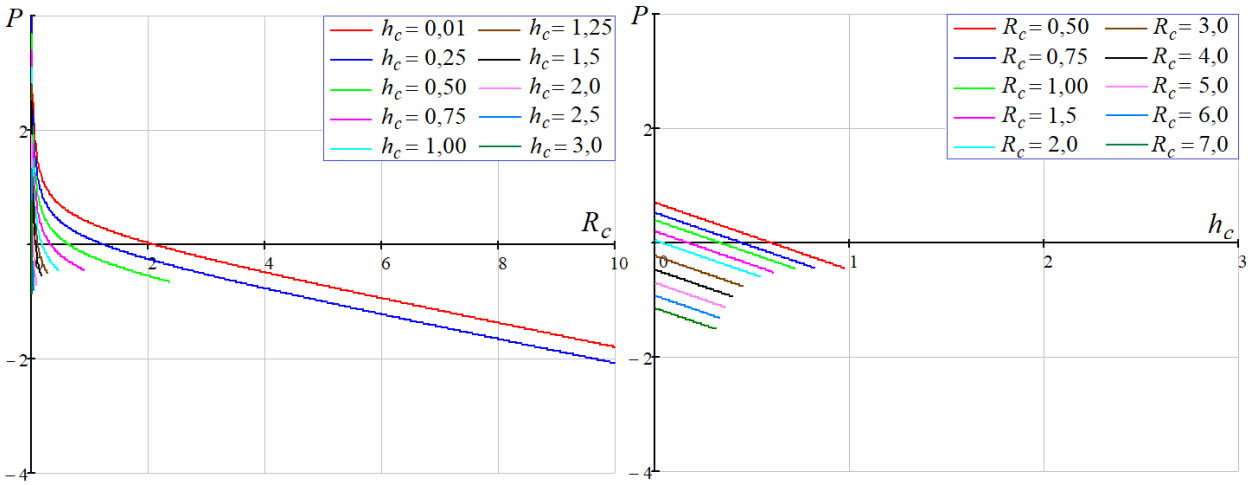


Рисунок Г.14 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}70$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

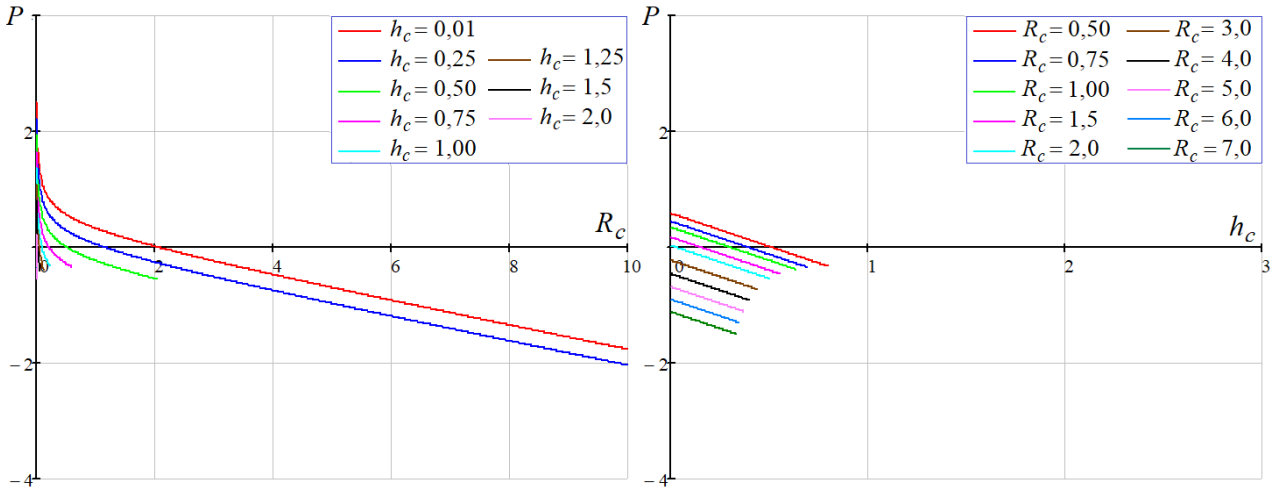


Рисунок Г.15 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}75$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

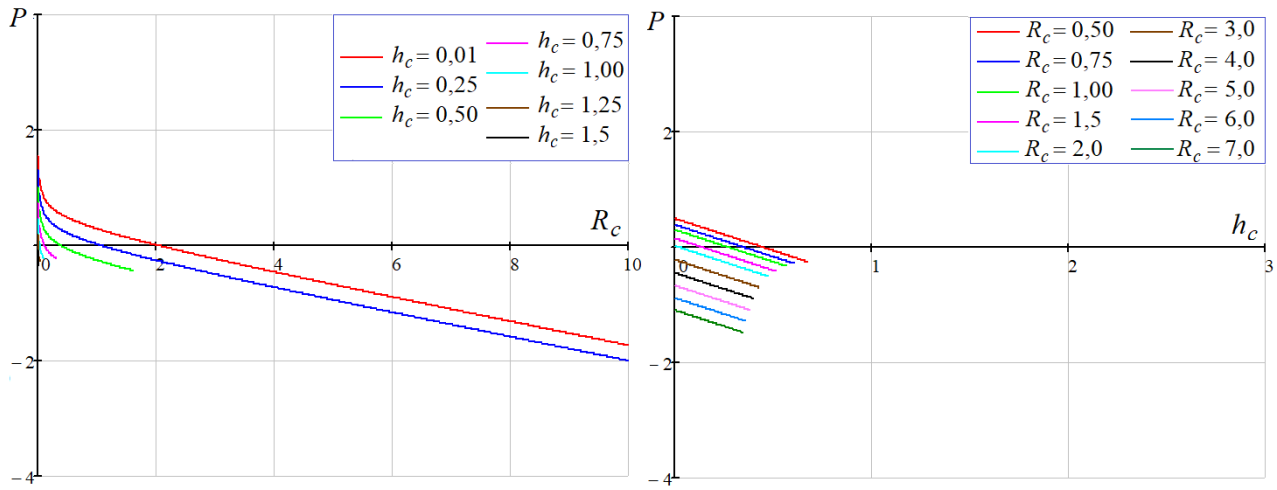


Рисунок Г.16 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}80$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

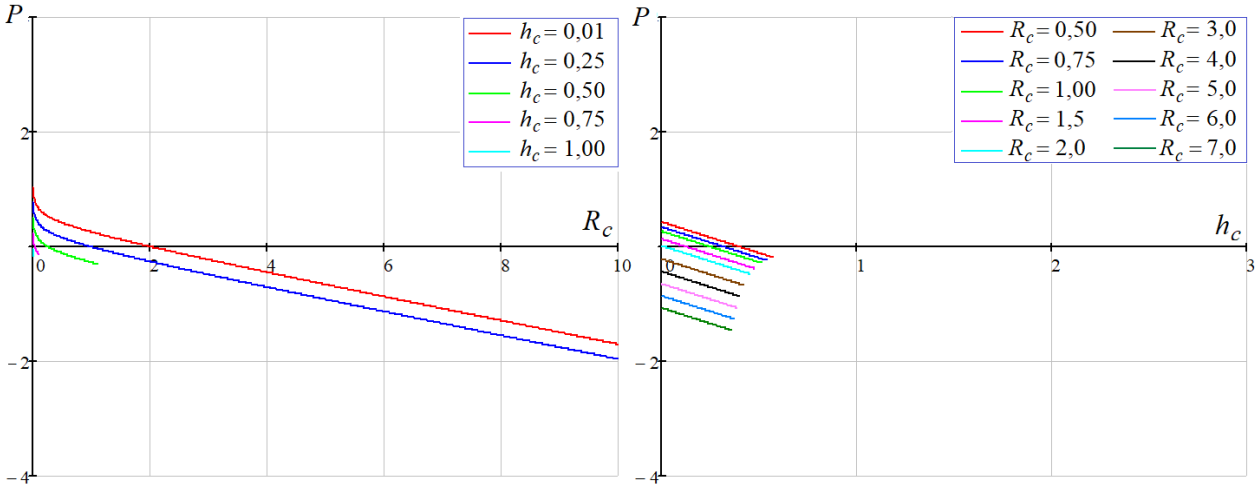


Рисунок Г.17 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}85$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

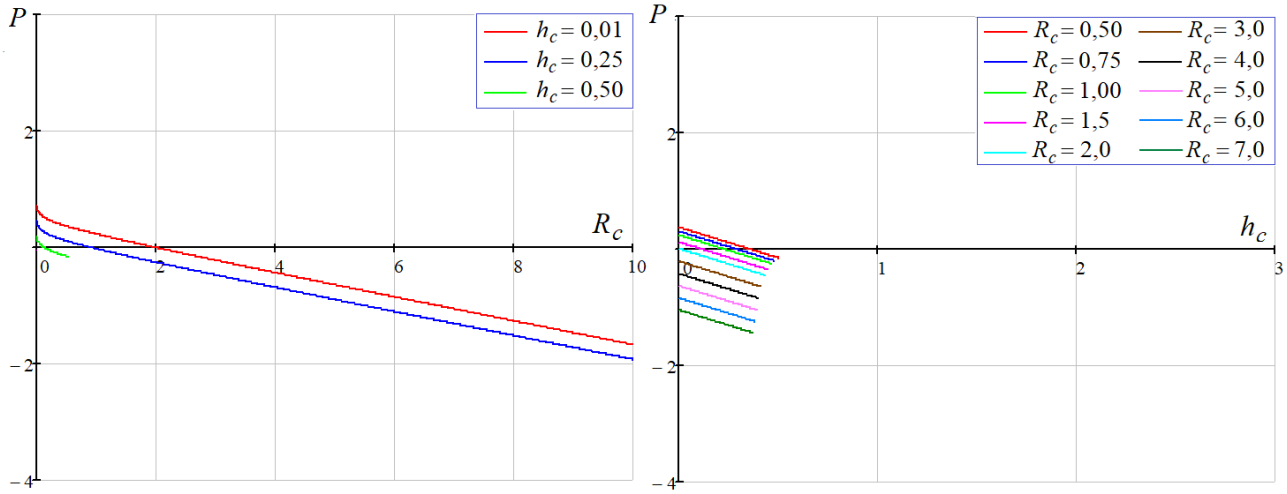


Рисунок Г.18 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}90$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

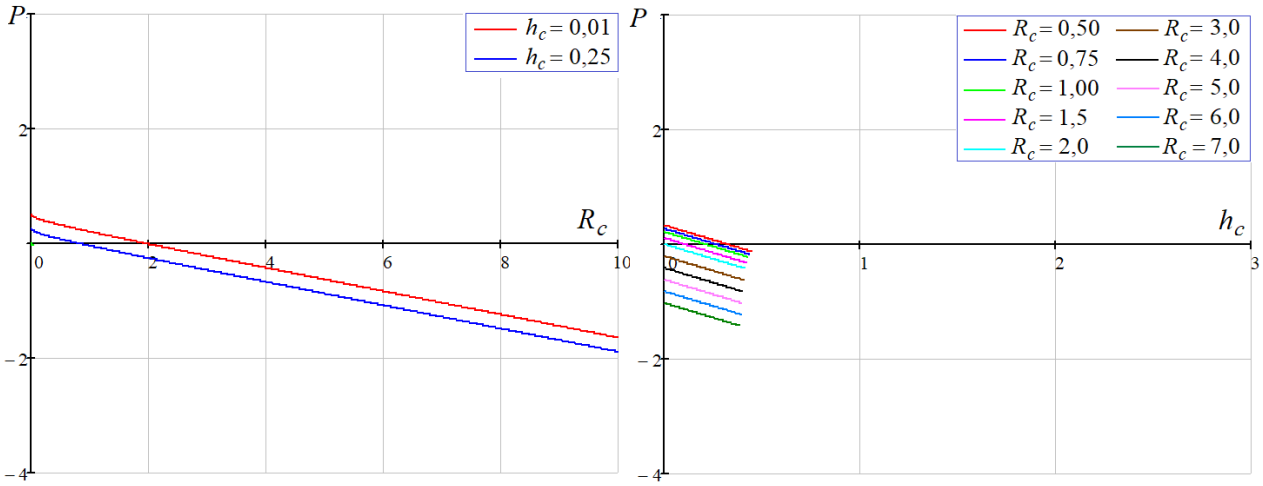


Рисунок Г.19 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 0{,}95$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

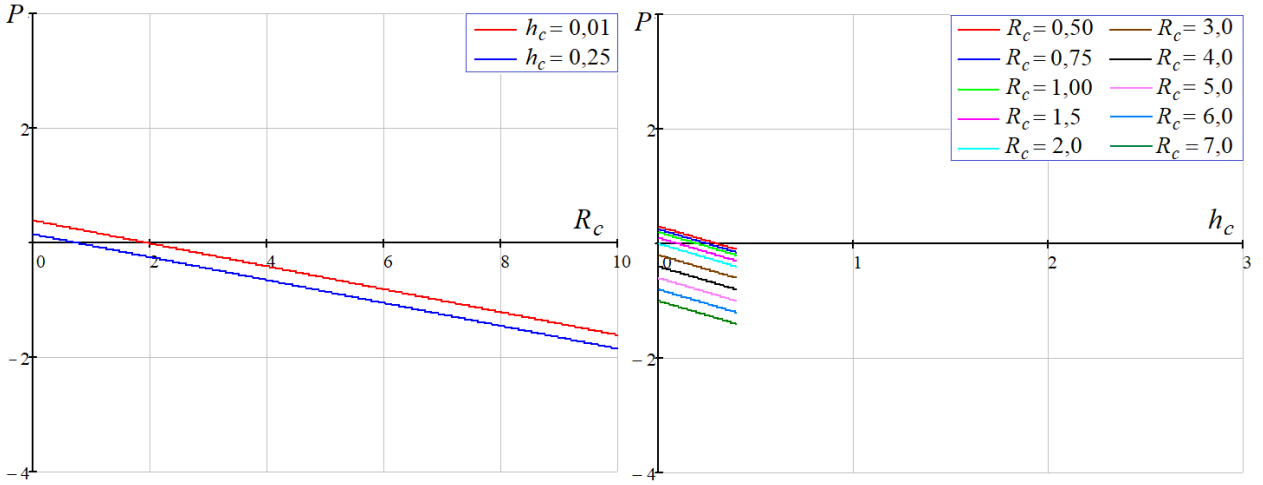


Рисунок Г.20 – Результаты решения задачи о сводообразовании над калоттой при $m = 1{,}0$: функции $P(R_c)$ при различных h_c (слева) и функции $P(h_c)$ при различных R_c (справа)

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Сводообразование над калоттой: сопоставление с МПА

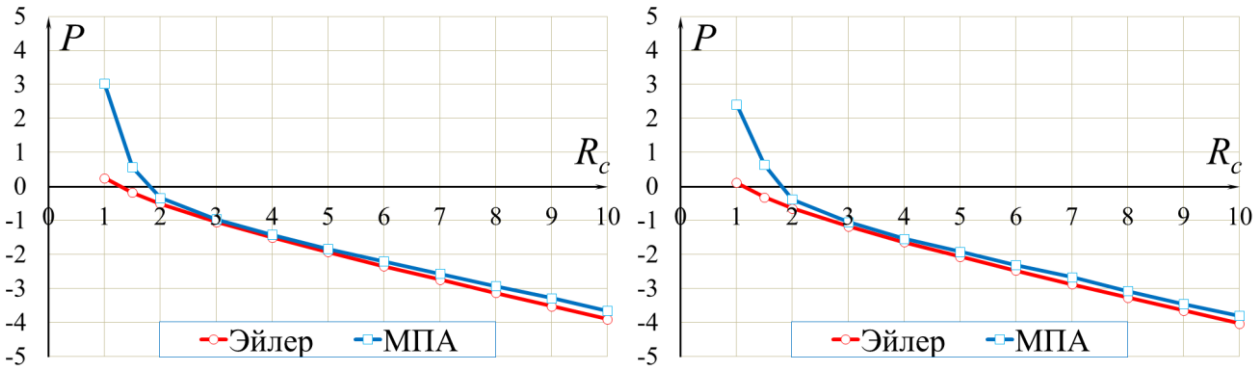


Рисунок Д.1 – Сопоставление с МПА при сводообразовании над калоттой в скальных грунтах: функции $P(R_c)$ при $h_c = 0{,}5$ (слева) и при $h_c = 0{,}6$ (справа)

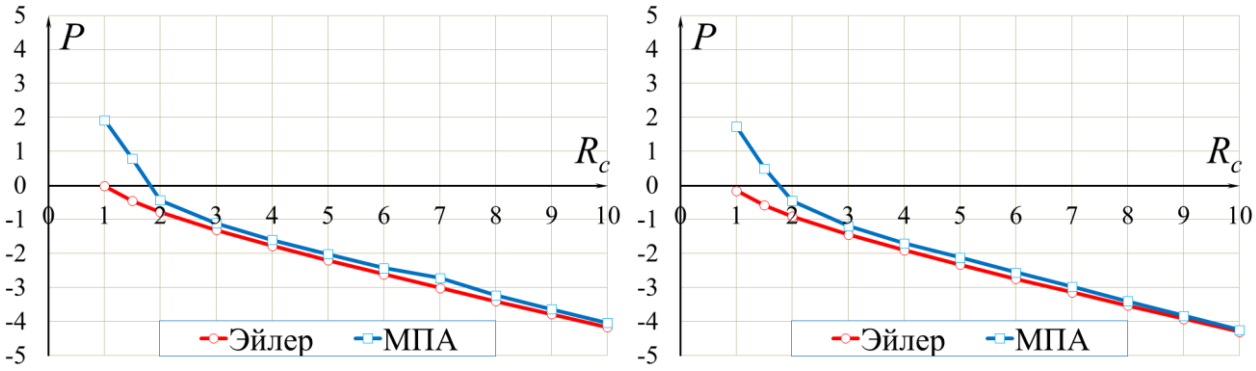


Рисунок Д.2 – Сопоставление с МПА при сводообразовании над калоттой в скальных грунтах: функции $P(R_c)$ при $h_c = 0{,}7$ (слева) и при $h_c = 0{,}8$ (справа)

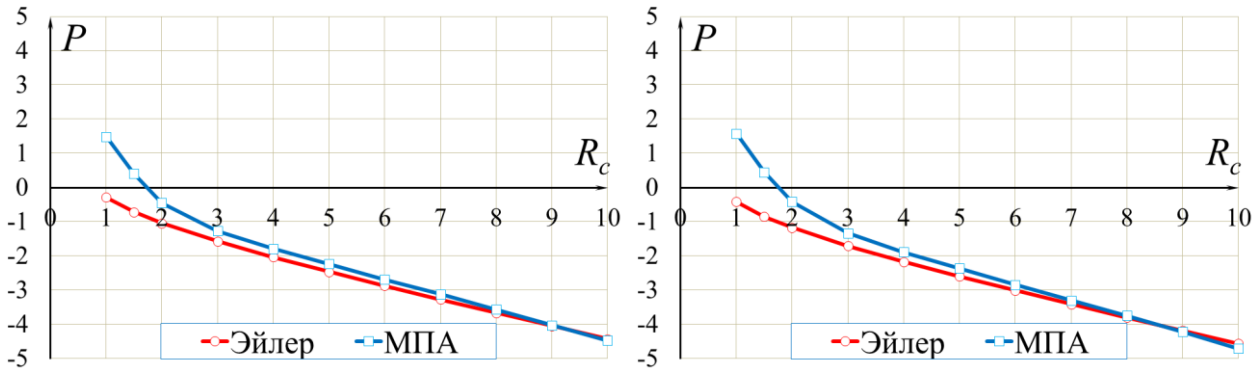


Рисунок Д.3 – Сопоставление с МПА при сводообразовании над калоттой в скальных грунтах: функции $P(R_c)$ при $h_c = 0{,}9$ (слева) и при $h_c = 1{,}0$ (справа)

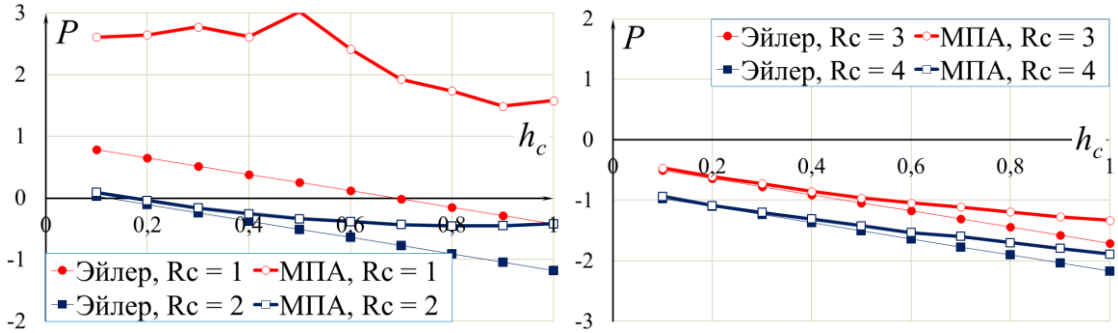


Рисунок Д.4 – Сопоставление с МПА при сводообразовании над калоттой в скальных грунтах: функции $P(h_c)$ при $R_c = 1$ и $R_c = 2$ (слева) и при $R_c = 3$ и $R_c = 4$ (справа)

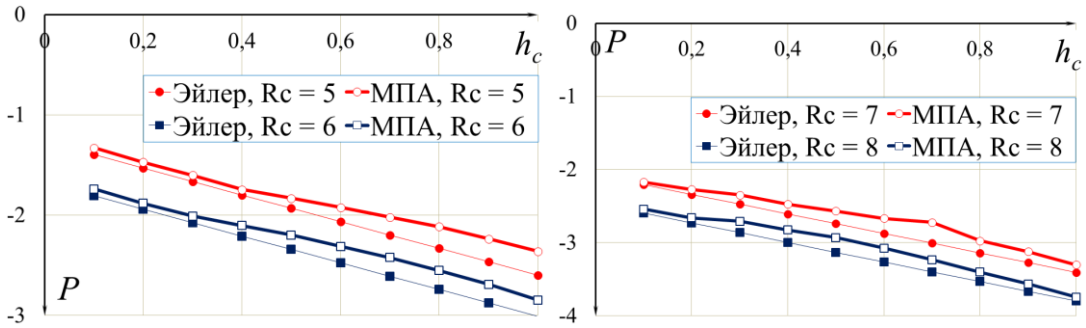


Рисунок Д.5 – Сопоставление с МПА при сводообразовании над калоттой в скальных грунтах: функции $P(h_c)$ при $R_c = 5$ и $R_c = 6$ (слева) и при $R_c = 7$ и $R_c = 8$ (справа)

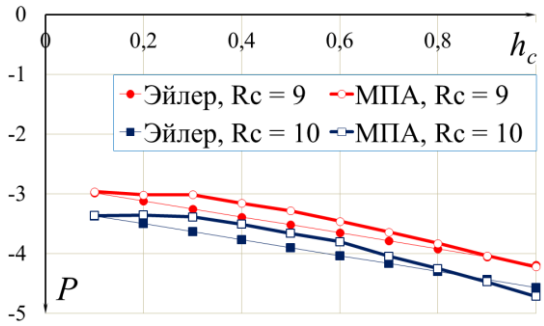


Рисунок Д.6 – Сопоставление с МПА при сводообразовании над калоттой в скальных грунтах: функции $P(h_c)$ при $R_c = 9$ и $R_c = 10$

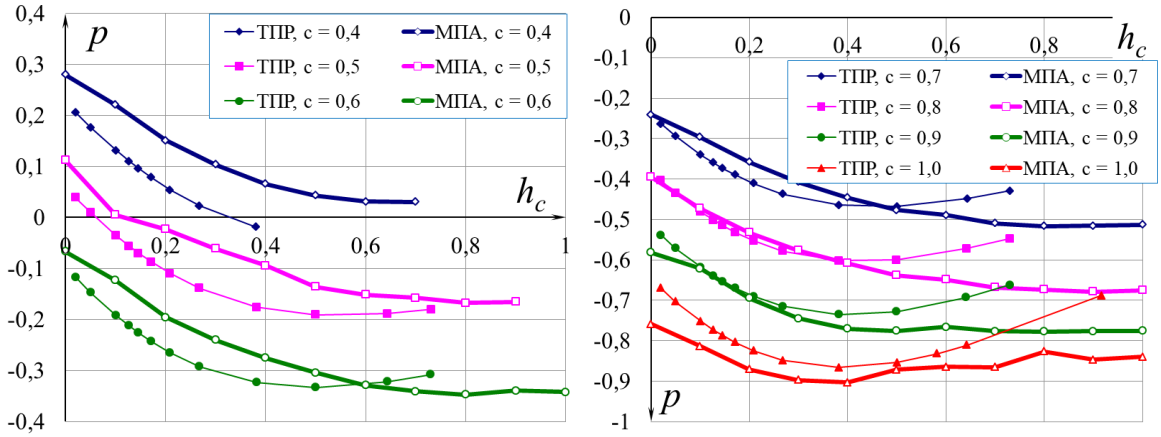


Рисунок Д.7 – Графики зависимости давления $p(h_c)$, рассчитанные по ТПР и МПА: результаты для $c = 0{,}4\ldots0{,}6$ (слева); *б* – результаты для $c = 0{,}7\ldots1{,}0$ (справа)

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Высота свода обрушения над калоттой в дисперсных грунтах

Таблица Е.1 – Относительные значения высоты *h* свода обрушения при $\bar{h}_c = 0{,}1$ и $\bar{h}_c = 0{,}2$

φ	$\bar{h}_c = 0{,}1$					$\bar{h}_c = 0{,}2$				
	относительное удельное сцепление $\bar{c}$					относительное удельное сцепление $\bar{c}$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
5°	1,163	1,03	0,99	0,971	0,959	1,197	1,051	1,007	0,986	0,973
10°	1,346	1,058	0,976	0,936	0,914	1,394	1,077	0,988	0,946	0,922
15°	1,524	1,088	0,964	0,904	0,872	1,581	1,105	0,971	0,91	0,875
20°		1,12	0,955	0,88	0,835		1,132	0,956	0,876	0,831
25°		1,152	0,95	0,854	0,8		1,155	0,944	0,846	0,791
30°		1,182	0,950	0,837	0,772		1,173	0,936	0,821	0,755
35°		1,206	0,957	0,826	0,75		1,185	0,931	0,801	0,725
40°			0,969	0,825	0,736			0,931	0,788	0,702
45°			0,988	0,832	0,732			0,935	0,783	0,687

Таблица Е.2 – Относительные значения высоты *h* свода обрушения при $\bar{h}_c = 0{,}3$ и $\bar{h}_c = 0{,}4$

φ	$\bar{h}_c = 0{,}3$					$\bar{h}_c = 0{,}4$				
	относительное удельное сцепление $\bar{c}$					относительное удельное сцепление $\bar{c}$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
5°	1,251	1,086	1,037	1,013	1	1,324	1,137	1,081	1,055	1,039
10°	1,47	1,114	1,015	0,97	0,943	1,576	1,168	1,057	1,006	0,976
15°	1,672	1,14	0,994	0,928	0,89		1,196	1,033	0,959	0,917
20°		1,162	0,974	0,888	0,84		1,215	1,01	0,914	0,861
25°		1,18	0,955	0,852	0,794		1,226	0,983	0,872	0,81
30°		1,188	0,938	0,820	0,752		1,225	0,959	0,833	0,762
35°		1,19	0,925	0,793	0,716		1,212	0,936	0,798	0,719
40°			0,914	0,77	0,685			0,915	0,768	0,68
45°			0,907	0,755	0,661			0,897	0,743	0,649

Таблица Е.3 – Относительные значения высоты *h* свода обрушения при $\bar{h}_c = 0{,}5$ и $\bar{h}_c = 0{,}6$

φ	$\bar{h}_c = 0{,}5$					$\bar{h}_c = 0{,}6$				
	относительное удельное сцепление $\bar{c}$					относительное удельное сцепление $\bar{c}$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
5°	1,42	1,201	1,137	1,107	1,09	1,534	1,2795	1,205	1,1345	1,15
10°	1,715	1,238	1,112	1,054	1,021	1,89	1,325	1,18	1,114	1,075
15°		1,269	1,085	1,002	0,955		1,362	1,15	1,058	1,005
20°		1,287	1,055	0,952	0,894		1,382	1,119	1,002	0,936
25°		1,294	1,025	0,904	0,836		1,382	1,082	0,948	0,872
30°		1,285	0,994	0,858	0,782		1,364	1,044	0,895	0,812
35°		1,259	0,962	0,817	0,733		1,325	1,005	0,847	0,757
40°			0,932	0,778	0,688			0,964	0,8	0,705
45°			0,903	0,745	0,649			0,924	0,759	0,66

Таблица Е.4 – Относительные значения высоты *h* свода обрушения при $\bar{h}_c = 0{,}7$ и $\bar{h}_c = 0{,}8$

φ	$\bar{h}_c = 0{,}7$					$\bar{h}_c = 0{,}8$				
	относительное удельное сцепление $\bar{c}$					относительное удельное сцепление $\bar{c}$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
5°	1,675	1,37	1,284	1,245	1,22	1,832	1,474	1,374	1,328	1,3
10°	2,12	1,421	1,261	1,184	1,14	2,395	1,554	1,355	1,265	1,215
15°		1,474	1,23	1,125	1,063		1,61	1,324	1,201	1,132
20°		1,495	1,195	1,064	0,99		1,635	1,285	1,135	1,0515
25°		1,495	1,153	1,002	0,918		1,625	1,238	1,067	0,975
30°		1,464	1,107	0,943	0,851			1,183	1,001	0,900
35°		1,41	1,057	0,887	0,79			1,125	0,937	0,83
40°			1,008	0,834	0,732			1,064	0,875	0,766
45°			0,958	0,784	0,68			1,002	0,817	0,707

Таблица Е.5 – Относительные значения высоты *h* свода обрушения при $\bar{h}_c = 0{,}9$

φ	$\bar{h}_c = 0{,}9$				
	относительное удельное сцепление $\bar{c}$				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
5°	2,02	1,59	1,472	1,418	1,39
10°		1,69	1,46	1,335	1,299
15°		1,76	1,42	1,2885	1,21
20°		1,798	1,39	1,218	1,12
25°		1,785	1,34	1,14	1,037
30°			1,272	1,069	0,956
35°			1,205	0,995	0,878
40°			1,128	0,925	0,808
45°			1,056	0,859	0,74

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Справки о внедрении результатов диссертационной работы

Общество с ограниченной ответственностью
Проектно-изыскательский институт
«БАМТОННЕЛЬПРОЕКТ»
(ООО ПИИ «БТП»)

630004, г. Новосибирск, Комсомольский пр-т, 1, корпус 3
(383) 319-00-01 / btp@btp-nsk.ru / www.btpnsk.ru

Система менеджмента:
ISO 9001:2015
ISO 14001:2015
ISO 45001:2018

Справка

о внедрении результатов диссертационной работы
«*Методика определения вертикальной нагрузки от горного давления на криволинейные конструкции подземных сооружений при сводообразовании*»
Королёвой Валерии Сергеевны
на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности
2.1.2 – Основания и фундаменты, подземные сооружения

Разработанная в кандидатской диссертации В.С. Королёвой методика определения вертикальной нагрузки от горного давления была использована при выполнении проектных работ на следующих объектах:

1. Второй Козинский тоннель с подходами на перегоне Джебь Щетинкино Красноярской железной дороги

Экономический эффект от применения методики, разработанной в диссертации В.С. Королёвой, составил 1 154 000,00 руб.

Генеральный директор Яковлев А.В.

МОСИНЖПРОЕКТ

АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
(АО «Мосинжпроект»)

СПРАВКА

О внедрении результатов диссертационного исследования

Результаты диссертации В.С. Королёвой на тему «Методика определения вертикальной нагрузки от горного давления на криволинейные конструкции подземных сооружений при сводообразовании», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 2.1.2 – «Основания и фундаменты, подземные сооружения», использованы АО «Мосинжпроект» при выполнении расчетов конструкций подземных сооружений на объектах:

1. Перегонные тоннели западного участка Большой Кольцевой линии (ЗУ БКЛ)

2. Переход на ст. «Динамо»

Внедрение в практику указанной методики способствовало повышению скорости и надежности строительства сооружений метрополитена в Москве.

Заместитель генерального директора по производству — В.П. Кивлюк